1. Elementy kombinatoryki - zadania do wyboru

Bernadeta Tomasz

Zadania dodatkowe

Zadanie 1.1. Mamy do wyboru 2 mieszkania i 3 auta. Na ile sposobów można dokonać wyboru, jeśli

1. mamy wybrać mieszkanie i samochód,
2. mamy wybrać mieszkanie lub samochód ?

Odpowiedź: *a)* $2 \cdot 3$, *b)* $2 + 3$

Zadanie 1.2. Ile wszystkich różnych przekątnych ma n-kąt wypukły?

Odpowiedź: $\frac{n(n-3)}{2}$

Permutacje

Zadanie 1.3. Na ile sposobów drużyna piłkarska (11 graczy) może wyjść z szatni pojedynczo na boisko.

Szkic rozwiązania. Piłkarze wychodząc pojedynczo, w rzędzie na boisko mogą ustawić się w różnej kolejności. Liczba tych ustawień jest równa liczbie możliwych do utworzenia ciągów piłkarzy. Tworzymy ciągi 11-elementowe zbioru 11-elementowego. Liczba tych ciągów odpowiada liczbie permutacji zbioru 11-elementowego. Mamay stąd:

$$N = 11! = 39916800.$$

A propos, to więcej (o ok. 100 000) niż liczba mieszkańców Polski wg. danych na rok 2015.
Odpowiedź: 39.916.800

Zadanie 1.4. Na ile wszystkich różnych sposobów można ustawić w szeregu 4 chłopców i 3 dziewczynki tak, aby:

1. najpierw stały dziewczynki, a następnie chłopcy,
2. pierwszy stał chłopiec,
3. pierwszy i ostatni stał chłopiec,
4. żadnych dwóch chłopców nie stało obok siebie.

Szkic rozwiązania. **(a)** Możemy sobie wyobrazić, że ustawiamy najpierw 3 dziewczynki, a następnie oddzielnie ustawiamy 4 chłopców. Dziewczynki możemy ustawić na 3! sposobów, a chłopców na 4! sposobów. Do każdego, danego ustawienia dziewczynek możemy dołączyć jedno z 4! ustawień chłopców. liczba wszystkich możliwych ustawień jest równa iloczynowi liczby ustawień dziewcznek i chłopców tj. $3! \cdot 4!$.

$$N = 3! \cdot 4! = 144.$$

(b) Ustawmy zatem w szeregu jako pierwszego chłopca. Chłopców jest czterech, mamy zatem 4 możliwości. Po obsadzeniu pierwszego miejsca w szeregu, możemy przystąpić do ustawienia pozostałych 6 osób, w dowolny sposób. Tę szóstkę osób mozemy ustawić na 6! sposobów. Dalej stosujemy zasadę mnożenia. Mamy zatem

$$N = 4 \cdot 6! = 2.880.$$

(c) W szeregu ustawmy na pierwszym miejscu chłopca (jednego z czterech). Następnie wybierzmy chłopca na ostatnie miejsce w szeregu - tu możemy wybierać już tylko jednego z trzech pozostałych chłopców. Dołączymy to nich pozostałą, 5-osobowę grupę osób, którą możemy ustawić w rzędzie na 5! sposobów. Stąd wszystkich możliwych, takich ustawień grupy osób jest $4 \cdot 3 \cdot 5!$.

$$N = 4 \cdot 3 \cdot 5! = 1.440.$$

(d) Jeśli żadni dwaj chłopcy nie mogą stać obok siebie, to znaczy, że chłopcy i dziewczęta muszą w szeregu ustawić się na przemian, a ponieważ chłopców jest więcej niż dziewcząt, to jako pierwszy powinien stać chłopak a nie dziewczyna. Stąd widać, że uwzględniając płeć, osoby powinny stanąć w następującej kolejności: C D C D C D C, gdzie C - oznacza chłopca, a D - oznacza dziewczynę. Skoro miejsca w szeregu, przeznaczone dla chłopców są już ustalone, wystarczy ich tam ustawić w jednej z 4!-możliwych kolejności. Teraz dołączymy do tej grupy dziewczyny. Miejsca dla nich są też już ustalone (każda dziewczyna pomiędzy dwoma chłopakami), wystarczy zatem, że ustawimy dziewczyny w ciąg, który dołączymy odpowiednio do ciągu chłopców. Mamy 3! możliwych permutacji 3-elementowego zbioru dziewczyn. Stąd wszystkich możliwych ustawień C D C D C D C jest $4! \cdot 3!$. Zatem

$$N = 4! \cdot 3! = 144.$$

Odpowiedź: (a) 144; (b) 2.880; (c) 1 440; (d) 144.

Zadanie 1.5. Na ile wszystkich różnych sposobów można ustawić w szeregu siedem kobiet i siedmiu mężczyzn tak, aby żadne dwie osoby tej samej płci nie stały obok siebie ?

Szkic rozwiązania. Osoby muszą być ustawione według schematu

K M K M K M K M K M K M K M
M K M K M K M K M K M K M K.

Siedem kobiet możemy ustawić w ciąg na 7! sposobów, podobnie siedmiu mężczyzn możemy ustawić w ciągu na 7! sposobów. Zatem mamy $7! \cdot 7!$ możliwych różnych ustawień, w których jako pierwszy stoi mężczyzna. Podobnie tyle samo, $(7! \cdot 7!)$ różnych możliwych ustawień zaczynajacych się od kobiety. Stąd liczba wszystkich możliwych ustawień kobiet i mężczyzn w szereg, tak aby żadne dwie osoby tej samej płci nie stały obok siebie wynosi:

$$N = 7! \cdot 7! \cdot 2 = 50.803.200.$$

Odpowiedź: 50 803 200

Zadanie 1.6. Ile wszystkich różnych liczb pięciocyfrowych

1. dowolnych
2. podzielnych przez 5
3. parzystych
4. podzielnych przez 4

można utworzyć z cyfr: $0, 1, 3, 4, 5$, jeśli każda cyfra może występować dokładnie raz ?

Szkic rozwiązania. **(a)** Liczby tworzymy, przez ustawienie w ciąg 5-elementowy cyfr ze zbioru $\{0, 1, 3, 4, 5\}$. Zbiór ten można uporządkować na 5! sposobów. W tym mamy 4! takich uporządkowań, w których pierwszą cyfrą jest 0, bo ustawiamy w ciąg cztery pozostałe cyfry. Liczba różnych liczb czterocyfrowych jest równa $5! - 4! = 4!(5 - 1) = 4 \cdot 4!$. Stąd

$$N = 4 \cdot 4! = 96.$$

(b) Jeśli liczba jest podzielna przez 5, to ostatnia jej cyfra (liczba jedności) jest równa 5 albo 0. Zatem tworząc liczby podzielne przez 5, spośród cyfr $0, 1, 3, 4, 5$ jako ostatni wyraz ciągu powinniśmy wybrać 0 albo 5.
Zbiór liczowy { 1,3,4,5 } można uporządkować na 4! sposobów, zatem mamy 4! liczb pięciocyfrowych, które jako ostatnią cyfrę mają 0.

Jeśli jako ostatnią cyfrę liczby wybierzemy 5, to cyfra 0 nie może wystąpić na pierwszej pozycji tworzonej liczby pieciocyfrowej. Zatem mamy 3 możliwości w wyborze pierwszej cyfry (wybieramy spośród $1, 3, 4$) oraz 3! sposobów uporządkowania pozostałych 3 cyfr. Ostatecznie, liczba N możliwych do uzyskania liczb pięciocyfrowych podzielnych przez 5, wynosi

$$N = 4! + 3 \cdot 3! = 42.$$

(c) Dla liczb parzysych, liczba jedności (ostatnia cyfra) jest liczbą parzystą. W warunkach naszego zadania tworzone liczby będą zatem parzyste jeśli ich ostatnia cyfra będzie równa 0 albo 4. Jeśli na ostatnią cyfrę liczby wybierzemy 0, to mamy 4! sposobów uporządkowania zbioru $\{1, 3, 4, 5\}$. Jeśli na ostatnią cyfrę wybierzemy 4, to na pozostałych czterech pozycjach mamy $3 \cdot 3!$ sposobów ustawienia pozostałych czterech liczb. Pamiętajmy bowiem, że 0 nie może wystąpić jako pierwsza cyfra w ciągu. Ostatecznie możemy w ten sposób utworzyć N liczb parzystych, gdzie

$$N = 4! + 3 \cdot 3! = 42.$$

(d) Jeśli liczba pięciocyfrowa jest podzielna przez 4, to znaczy, że liczba utworzona z jej dwóch ostatnich cyfr jest podzielna przez 4. Liczba pięciocyfrowa utworzona z cyfr ze zbioru $\{0, 1, 3, 4, 5\}$ i podzielna przez 4 jako dwie ostatnie cyfry ma 04 lub 40. Stąd mamy $2 \cdot 3! = 12$ liczb pięciocyfrowych podzielnych przez 4, utworzonych z cyfr $0, 1, 3, 4, 5$.
Odpowiedź: (a) 96; (b) 42; (c) 42 (d) 12

Zadanie 1.7. Do przedziału kolejowego drugiej klasy (dwa rzędy po cztery miejsca) wchodzi osiem osób. Na ile wszystkich różnych sposobów mogą one zająć miejsca tak, aby ustalone dwie osoby A oraz B siedziały:

1. obok siebie,
2. naprzeciwko ?

Szkic rozwiązania. **(a)** Dla dwójki wybranych pasażerów A i B, możemy wybrać na 3 sposoby dwa kolejne miejsca w każdym z 2 rzędów, czyli łącznie na 6 sposobów. Dalej, po tym wyborze pozostaje nam w sumie 6 pozostałych pasażerów do posadzenia - uporządkowania na 6 miejscach, co możemy uczynić na 6! sposobów, bo możemy przyjąć, w tym przypadku, że rzędy są połączone w jeden. Przydanym ustawieniu szóstki pasażerów i para pasażerów AB, może siąść w dwóch możliwych porządkach AB albo BA. Zatem mamy

$$N = 6 \cdot 6! \cdot 2 = 8.640.$$

wszystkich różnych sposobów posadzenia pasażerów w ten sposób, aby pasażerowie A i B siedzieli obok siebie.

(b) Jeśli wybrani pasażerowie A, B mają siedzieć naprzeciwko siebie, to możemy wybrać dla tej pary 4 możliwe pary miejsc (znajdujących się naprzeciwko siebie). Pozostałych 6 osób można ulokować na pozostałych 6 miejscach na 6! sposobów. Ponadto pasażerowie A i B mogą zająć wybrane dla nich dwa miejsca na 2 sposoby : A, B oraz B, A. Stąd liczba N wszystkich możliwych sposobów na jakie ośmiu pasażerów może zająć miejsca w przedziale, przyjmując, że wybrani pasażerowie A, B siedzą na przeciwko siebie wynosi:

$$N = 4 \cdot 6! \cdot 2 = 5.760.$$

Odpowiedź: (a) 8.640, (b) 5.760.

Zadanie 1.8. Na ile różnych sposobów można posadzić przy okrągłym stole n osób?
Jeśli każde dwa sposoby rozsadzenia uważamy za jednakowe wtedy i tylko wtedy,

a) gdy każda osoba ma tego samego sąsiada z prawej strony i tego samego z lewej strony,
b) gdy każda osoba ma jednakowych sąsiadów (nie ważne czy z prawej czy z lewej strony).

Uwaga 1.9. Przy okrągłym stole miejsca nie są numerowane.

Odpowiedź: a) $(n-1)!$, b) $\frac{(n-1)!}{2}$

Kombinacje

Zadanie 1.10. Ile nastąpi wszystkich uścisków dłoni, gdy 5 (n) osób wita się uściskiem dłoni, "każdy z każdym".

Odpowiedź: $\binom{5}{2}$, $\binom{n}{2}$

Zadanie 1.11. W turnieju startuje 7 zawodników. Każdy zawodnik rozgrywa jeden mecz z każdym ze swoich przeciwników. Ile meczy zostanie rozegranych?

Odpowiedź: $\binom{7}{2}$

Zadanie 1.12. Z klasy, w której jest 17 dziewcząt i 14 chłopców wybieramy dwuosobową delegację. Na ile różnych sposobów możemy to zrobić, aby skład delegacji był następujący:

1. 2 chłopców,
2. 2 dziewczyny,
3. chłopiec i dziewczyna,
4. co najmniej 1 dziewczyna?

Odpowiedź: a) $\binom{14}{2}$, b) $\binom{17}{2}$, c) $\binom{14}{1}\cdot\binom{17}{1}$, d) $\binom{31}{2}-\binom{14}{2}$

Zadanie 1.13. Na ile sposobów można wybrać przewodniczącego, jego zastępcę i skarbnika z grupy 5 osób? Zakładamy, że funkcji nie można łączyć.

Odpowiedź: $\binom{5}{3}\cdot 3!$

Zadanie 1.14. Na ile sposobów można podzielić 10 różnych znaczków pomiędzy Adama i Bartka, tak aby każdy z nich dostał po 5.

Odpowiedź: $\binom{10}{5}\cdot\binom{5}{5}$

Zadanie 1.15. Na ile sposobów z grupy 6 dziewcząt i 6 chłopców można wybrać delegację

1. złożoną z 3 dziewcząt i 2 chłopców,
2. złożoną z 3 dziewcząt albo 2 chłopców?

Odpowiedź: a) $\binom{6}{3}\cdot\binom{6}{2}$, b) $\binom{6}{3}+\binom{6}{2}$

Zadanie 1.16. Na ile sposobów można rozdać 52 karty pomiędzy czterech graczy tak, aby każdy z nich dostał 13 kart?

Odpowiedź: $\binom{52}{13}\cdot\binom{39}{13}\cdot\binom{26}{13}\cdot$

Zadanie 1.17. Na ile sposobów z talii 52 kart można wybrać 13 kart tak, aby były wśród nich

1. dokładnie 4 asy,
2. dokładnie 2 asy,

3. dokładnie 2 asy i dokładnie 2 króle?

Odpowiedź: a) $\binom{48}{9}$, b) $\binom{4}{2}\cdot\binom{48}{11}$, c) $\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{44}{9}$

Zadanie 1.18. Na ile sposobów można podzielić 9 różnych przedmiotów pomiędzy 3 osoby tak, aby każda z nich dostała 3 przedmioty.

Odpowiedź: $\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}$

Zadanie 1.19. Na ile sposobów można rozmieścić 9 studentów w trzech istotnie różnych pokojach, z których dwa są 4-osobowe a jeden 1-osobowy?

Odpowiedź: $\binom{9}{4}\cdot\binom{5}{4}$

Zadanie 1.20. Tysiąc osób uczestniczących w festiwalu teatralnym, odpowiedziało na pytania: 1) Którą z dziesięciu sztuk uważasz za najlepszą, 2) którą stawiasz na drugim miejscu, 3) którą na trzecim? Czy może się zdarzyć, że wszyscy odpowiedzieli różnie?

Odpowiedź: $\binom{10}{3}\cdot 3! < 1000$, zatem NIE

Zadanie 1.21. Jeden bar oferuje 5 zup i 10 drugich dań, drugi natomiast 6 zup i 8 drugich dań. Ile różnych obiadów dwudaniowych masz do wyboru, jeśli się zdecydujesz zjeść obiad w jednym z tych barów?

Odpowiedź: $\binom{5}{1}\cdot\binom{10}{1}+\binom{6}{1}\cdot\binom{8}{1}$

Zadanie 1.22. W jednym pojemniku znajdują się 4 kule białe i 5 czarnych. Na ile różnych sposobów można wyjąć z pojemnika 3 kule (wyciągamy jednocześnie) tak, aby otrzymać

1. 3 kule białe,
2. 3 kule czerwone,
3. 2 kule białe i 1 czerwoną,
4. co najmniej jedną kulę białą ?

Odpowiedź: a) $\binom{4}{3}$, b) $\binom{5}{3}$, c) $\binom{4}{2}\cdot\binom{5}{1}$, d) $\binom{9}{3}-\binom{5}{3}$.

Zadanie 1.23. Na ile sposobów można ułożyć harmonogram klasówek na 15 tygodni, przy założeniu, że w tygodniu mogą być co najwyżej 2 klasówki, a tydzień składa się z 30 godzin lekcyjnych?

Odpowiedź: $\left[\binom{30}{2}+\binom{30}{1}+1\right]^{15}$

Zadanie 1.24. Na ile sposobów można zestawić pociąg z 4 wagonów I klasy, 6 wagonów II klasy, 1 wagonu restauracyjnego? Zakładamy, że wagony ustalonej klasy nie sż rozróżnialne. Na ile sposobów można zestawić wagony, gdy wszystkie różnią się między sobą?

Odpowiedź: a) $\binom{11}{4}\cdot\binom{7}{6}$, b) $11!$

Zadanie 1.25. Deseń składa się z 12 kafelków, ułożonych obok siebie "gęsiego". Ile takich deseni można ułożyć mając 4 kafelki białe, 4 błękitne i 4 granatowe.
Odpowiedź: $\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}$

Zadanie 1.26. Na okręgu zaznaczono 6 różnych punktów. Ile wszystkich różnych wielokoątów o wszystkich wierzchołkach w tych punktach, można narysować?
Odpowiedź: $\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+1$

Wariacje (bez powtórzeń, z powtórzeniami)

Zadanie 1.27. Obliczyć liczbę różnych flag utworzonych przez trzy poziome różnokolorowe pasy, których kolory można wybrać spośród 6-ciu kolorów.
Odpowiedź: $V_3^6 = 6\cdot 5\cdot 4 = 120$

Zadanie 1.28. Obliczyć, ile jest liczb pięciocyfrowych o wszyskich cyfrach różnych.
Odpowiedź: $[9\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6]$

Zadanie 1.29. Obliczyć liczbę sposobów rozdzielenia trzech medali (złotego, srebrnego i brązowego) pomiędzy sześciu zawodników.
Odpowiedź: $V_3^6 = 6\cdot 5\cdot 4 = 120$, inaczej: $C_3^6\cdot 3!$

Zadanie 1.30. Ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych ? Ile jest liczb czterocyfrowych o wszystkich cyfrach różnych?
Odpowiedź: *a)* $9\cdot 10^3$, *b)* $9\cdot 9\cdot 8\cdot 7$

Zadanie 1.31. Na ile sposobów można rozmieścić 9 kul ponumerowanych od 1 do 9, w trzech komórkach ponumerowanych od I do III?
Odpowiedź: 3^9

Zadanie 1.32. Na ile sposobów można rozmieścić 9 kul ponumerowanych od 1 do 9, w trzech komórkach ponumerowanych od I do III tak, aby

1. w komórce o numerze I była kula o numerze 1 (mogą w tej komórce być jeszcze inne kule),
2. w komórce o numerze I była dokładnie jedna kula,
3. w komórce o numerze I była co najmniej jedna kula,
4. w komórce o numerze I była co najwyżej jedna kula.

Odpowiedź: *a)* 3^8, *b)* $9\cdot 2^8$, *c)* 3^9-2^9, *d)* $9\cdot 2^8+2^9$.

Zadanie 1.33. Na ile sposobów można rozmieścić 7 kul ponumerowanych od 1 do 7, w pięciu komórkach ponumerowanych od I do V?
Odpowiedź: 5^7

Zadanie 1.34. Na ile sposobów można rozmieścić 7 kul ponumerowanych od 1 do 7, w pięciu komórkach ponumerowanych od I do V tak, aby

1. dokładnie jedna komórka była zajęta,
2. dokładnie dwie komórki były zajęte,
3. dokładnie trzy komórki były zajęte?

Odpowiedź: a) 5, b) $\binom{5}{2}(2^7 - 2)$, c) $\binom{5}{3}(3^7 - 3 \cdot 2^7 + 3)$

Zadanie 1.35. Ile wszystkich różnych wyników można otrzymać, gdy rzucamy 2 razy kostką i trzy razy monetą?
Odpowiedź: $6^2 \cdot 2^3$