# Funkcje trygonometryczne

*Piotr Rzonsowski*

## Teoria

**Definicja 1.** **Sinusem** kąta ostrego $\alpha$ nazywamy stosunek przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta $\alpha$ do przeciwprostokątnej

$$\sin\alpha = \frac{b}{c}.$$

**Cosinusem** kąta ostrego $\alpha$ nazywamy stosunek przyprostokątnej leżącej przy kącie $\alpha$ do przeciwprostokątnej

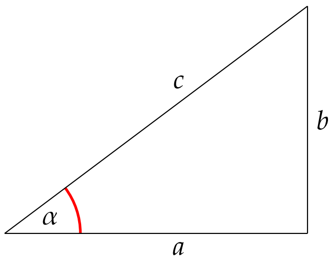
$$\cos\alpha = \frac{a}{c}.$$

**Tangensem** kąta ostrego $\alpha$ nazywamy stosunek przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta $\alpha$ do przyprostokątnej leżącej przy kącie $\alpha$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

**Cotangensem** kąta ostrego $\alpha$ nazywamy stosunek przyprostokątnej leżącej przy kącie $\alpha$ do przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta $\alpha$

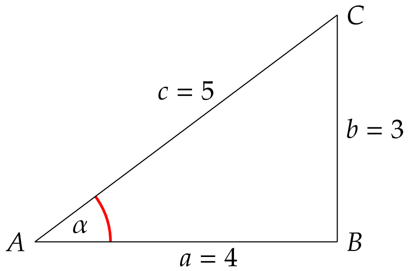
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{b}$$




$\sin\alpha = \frac{b}{c}$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$

$\cos\alpha = \frac{a}{c}$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{b}$

**Przykład 1.** Oblicz wartości funkcji sin, cos, tg, ctg, dla kąta $\alpha$ w trójkącie $ABC$.

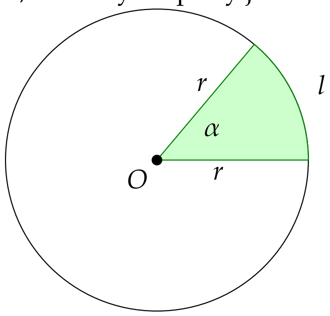



Korzystając ze wzorów dostajemy:

$$\sin\alpha = \frac{b}{c} = \frac{3}{5}, \qquad \cos\alpha = \frac{a}{c} = \frac{4}{5}$$

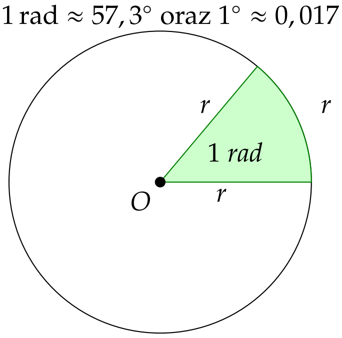
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{4}{3}$$

**Definicja 2.** **Miara łukowa** kąta środkowego w okręgu, to liczba równa stosunkowi długości łuku, na którym oparty jest ten kąt, do długości promienia okręgu




miara łukowa kąta $\alpha$ wynosi $\frac{l}{r}$.

Kąt o mierze łukowej 1 nazywamy **radianem**. 1 radian (w skrócie 1 rad), to miara kąta środkowego, który wycina z okręgu koła łuk o długości równej długości promienia okręgu. Zauważmy, że $1\,\text{rad} \approx 57,3^\circ$ oraz $1^\circ \approx 0,017\,\text{rad}$




**Definicja 3.** Liczba $\pi$ to stosunek długości okręgu do długości jego średnicy, jest wielkością stałą niezależną od promienia okręgu.

| miara w stopniach | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ | $180^\circ$ | $360^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| miara łukowa | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $2\pi$ |

*Uwaga* 1. Wybrane wartości funkcji trygonometrycznych.

| | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| $\cos\alpha$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | brak |
| $\operatorname{ctg}\alpha$ | brak | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ |

*Uwaga* 2. Poniżej podane są wartości liczby $\pi$, jakie pojawiały się w pracach uczonych świata.
— Babilończycy (ok. 2000 r. p.n.e.): $\pi \approx 3$

— Egipcjanie (ok. 2000 r. p.n.e.): $\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3,160493\ldots$
— Archimedes (III w. p.n.e.): $\pi \approx \frac{22}{7} \approx 3,14$
— Chiński matematyk Chang Hing (I w. n. e.): $\pi \approx \frac{142}{45} \approx 3,1555\ldots$
— hinduski matematyk Bhasakara (VII w. n.e.): $\pi \approx \frac{754}{240} \approx 3,1416666\ldots$
— włoski matematyk Leonardo Fibonacci (XIII w.): $\pi \approx \frac{864}{275} \approx 3,1415929$
— niemiecki matematyk Gottfried Wilhelm Leibniz (XVII w.): $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$

*Uwaga* 3. Warto pamiętać, że miara łukowa małych kątów jest dobrym przybliżeniem wartości funkcji trygonometrycznych sin i tg, tzn. $\sin x \approx x$ oraz $\operatorname{tg} x \approx x$ dla dostatecznie małych $x$.

**Przykład 2.** Zamień miarę stopniową na miarę łukową dla kąta 40°.

Zanim zamienimy żądany kąt na radiany zastanówmy się, jak możemy to zrobić dla dowolnego kąta $\alpha$. W tym celu ułóżmy proporcję

$$\begin{aligned} 180^\circ &- \pi \\ \alpha &- x \end{aligned}$$

Z powyższej proporcji dostajemy równanie

$$x \cdot 180^\circ = \alpha \cdot \pi$$

Dzieląc przez 180° dostajemy wzór na zamianę stopni na radiany:

$$x = \frac{\alpha \cdot \pi}{180^\circ}$$

Korzystając z powyższego wzoru dostajemy

$$x = \frac{40^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{2}{9}\pi$$

Zatem w radianach kąt jest równy $\frac{2}{9}\pi$.

**Przykład 3.** Zamień miarę łukową na miarę stopniową dla wartości $\frac{\pi}{10}$.

Korzystając ponownie z proporcji:

$$\begin{aligned} 180^\circ &- \pi \\ \alpha &- x \end{aligned}$$

i wyznaczając tym razem $\alpha$ dostajemy

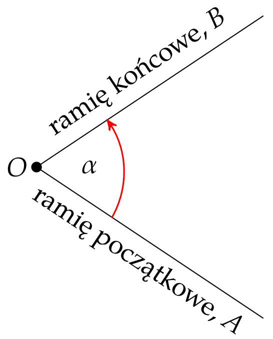
$$\alpha = \frac{x \cdot 180^\circ}{\pi}.$$

Z powyższego wzoru dostajemy

$$\alpha = \frac{\frac{\pi}{10} \cdot 180^\circ}{\pi} = 18^\circ$$

Zatem miara w stopniach kąta jest równa 18°.

**Definicja 4. Kąt skierowany** jest to uporządkowana para półprostych o wspólnym początku. Pierwsza półprosta jest nazywana **ramieniem początkowym**, druga półprosta - **ramieniem końcowym**, wspólny początek półprostych nazywamy **wierzchołkiem kąta**.

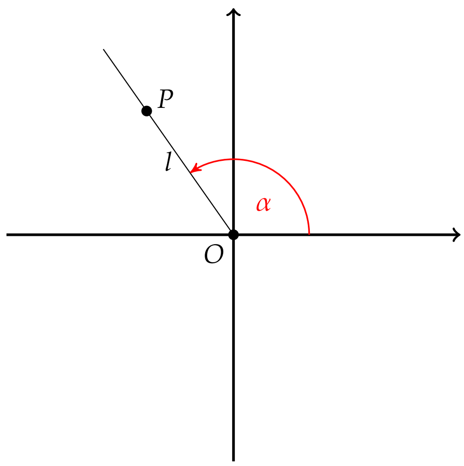



Kąt skierowany oznaczamy graficznie tak, jak to obrazuje rysunek (łuk kończy się strzałką, aby zaznaczyć ramię końcowe). Kąt skierowany oznaczamy następująco: $\overrightarrow{\sphericalangle AOB}$.

Mówimy, że dwa kąty skierowane $\alpha, \beta$ są równe gdy spełniony jest następujący warunek: każdy z tych kątów jest obrazem drugiego za pomocą pewnej translacji lub obrotu albo za pomocą złożenia tych dwóch przekształceń, przy czym w wyniku tych przekształceń ramię początkowe kąta $\beta$ powinno się nałożyć na ramię początkowe kąta $\alpha$, a ramię końcowe kąta $\beta$ na ramię końcowe kąta $\alpha$.

Kątem skierowanym przeciwnym do kąta $\overrightarrow{\sphericalangle AOB}$ jest kąt $\overrightarrow{\sphericalangle BOA}$ i każdy kąt równy temu kątowi.

*Uwaga* 4. Niech $P = (x, y)$ będzie dowolnym punktem na płaszczyźnie kartezjańskiej. Wtedy mamy jednoznacznie wyznaczoną półprostą $l$ o początku w środku układu współrzędnych oraz przechodzącą przez punkt $P$. Ponieważ półprosta $l$ jest wyznaczona jednoznacznie, to również jest jednoznacznie wyznaczony kąt skierowany $\alpha$ pomiędzy półosią dodatnią osi $OX$ a półprostą $l$. Zauważmy, że miara kąta $\alpha$ nie zależy od wyboru punktu $P$ na półprostej $l$ i oczywiście należy do przedziału $[0, 2\pi)$.




**Definicja 5.** Niech $P = (x, y)$ będzie punktem, który odpowiada kątowi $\alpha$ z uwagi 4 oraz $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (odległość punktu $P$ od środka układu współrzędnych). Wtedy funkcje trygonometryczne sinus, cosinus, tangens, cotangens kąta $\alpha$ definiujemy za pomocą następujących ilorazów:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}; \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}; \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x},\ x \neq 0; \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y},\ y \neq 0. \tag{1}$$

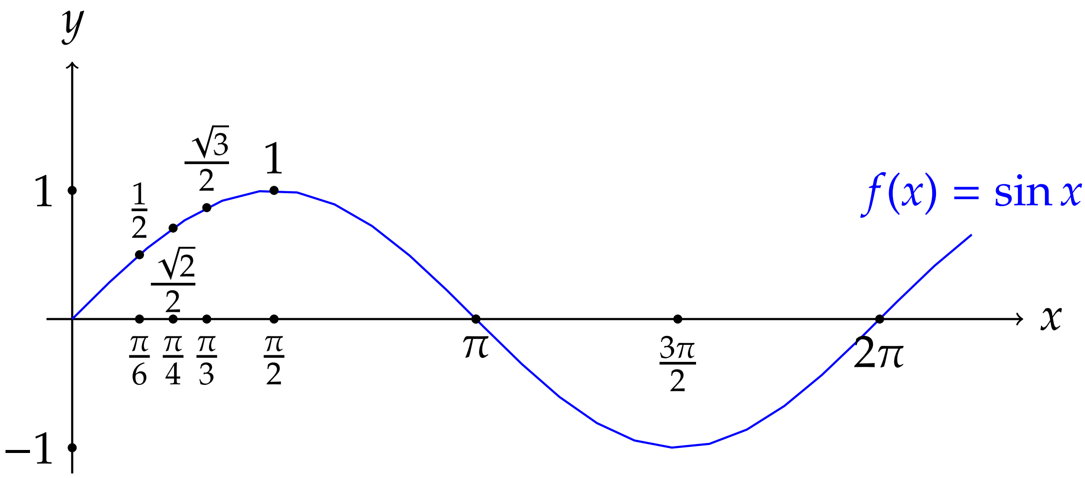
W ten sposób zdefiniowaliśmy cztery funkcje trygonometryczne dla kątów skierowanych o mierze łukowej od 0 do $2\pi$ rad, a więc funkcje, których argumentami są liczby rzeczywiste z przedziału $[0, 2\pi]$.

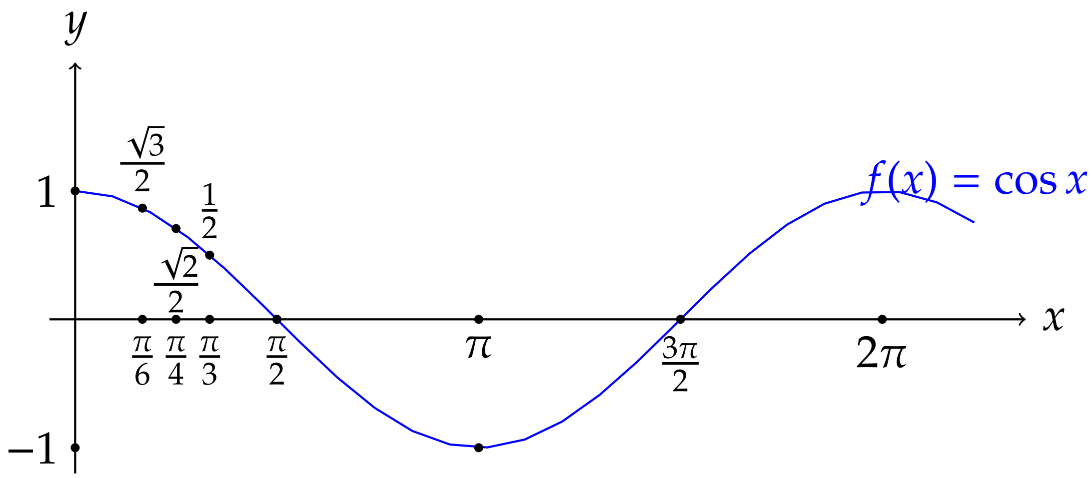
Zauważmy, że funkcja tangens nie jest zdefiniowana dla $x = 0$, zatem funkcja ta nie jest zdefiniowana, gdy ramię końcowe kąta leży na osi $OY$, czyli dla kątów $\frac{\pi}{2}$ rad i $\frac{3}{2}\pi$ rad. Natomiast cotangens nie jest określony dla $y = 0$, czyli gdy ramię końcowe leży na osi $OX$, stąd dostajemy, że cotangens jest niezdefiniowany dla kątów 0 rad i $\pi$ rad.

Przez **kąt o mierze ujemnej** rozumieć będziemy kąt, w którym ruch od ramienia początkowego do ramienia końcowego odbywa się w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, przy czym nadal ramię początkowe takiego kąta "leży" na dodatniej części osi OX, a wierzchołek kąta pokrywa się z początkiem układu współrzędnych. W ten sposób poszerza się zakres rozpatrywanych (miar) kątów skierowanych, a więc zakres argumentów funkcji trygonometrycznych do przedziału $[-2\pi, 2\pi]$.

Możliwe wartości miary łukowej kątów od $[-2\pi, 2\pi]$ możemy dalej poszerzyć do zbioru $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych, wykonując więcej niż jeden pełen obrót ramienia końcowego kąta w kierunku przeciwnym (dla kątów dodatnich) lub zgodnym (dla kątów ujemnych) do ruchu wskazówek zegara. Dla kąta o dowolnej mierze łukowej $\alpha \in \mathbb{R}$ definiujemy funkcje trygonometryczne tak samo jak dla kąta od 0 do $2\pi$, tzn. wybieramy punkt $P$ leżący na ramieniu końcowym kąta $\alpha$, a następnie korzystamy ze wzorów (1).

Wykresy sinusa i cosinusa:



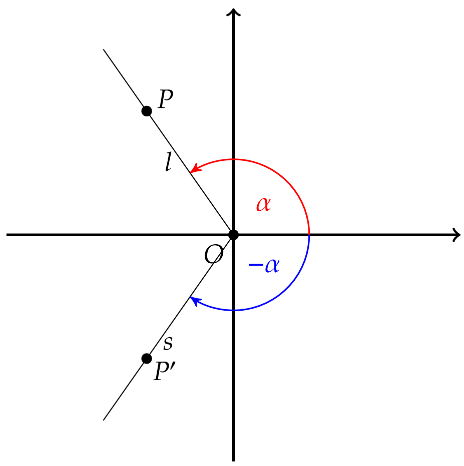



Animacja rysująca wykresy funkcji sinus i cosinus(do działania animacji wymagany jest Adobe Reader):

*Uwaga* 5. Z powyższej konstrukcji funkcji trygonometrycznej możemy określić następujące dziedziny i zbiory wartości

$$\begin{aligned}
&\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1],\\
&\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1],\\
&\operatorname{tg} : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\} \to \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z},\\
&\operatorname{ctg} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} \to \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

*Uwaga* 6. Zobaczmy, jakie są zależność między funkcjami trygonometrycznymi dla kąta $\alpha$ oraz $-\alpha$. Na początku zaznaczmy te kąty w układzie współrzędnych.

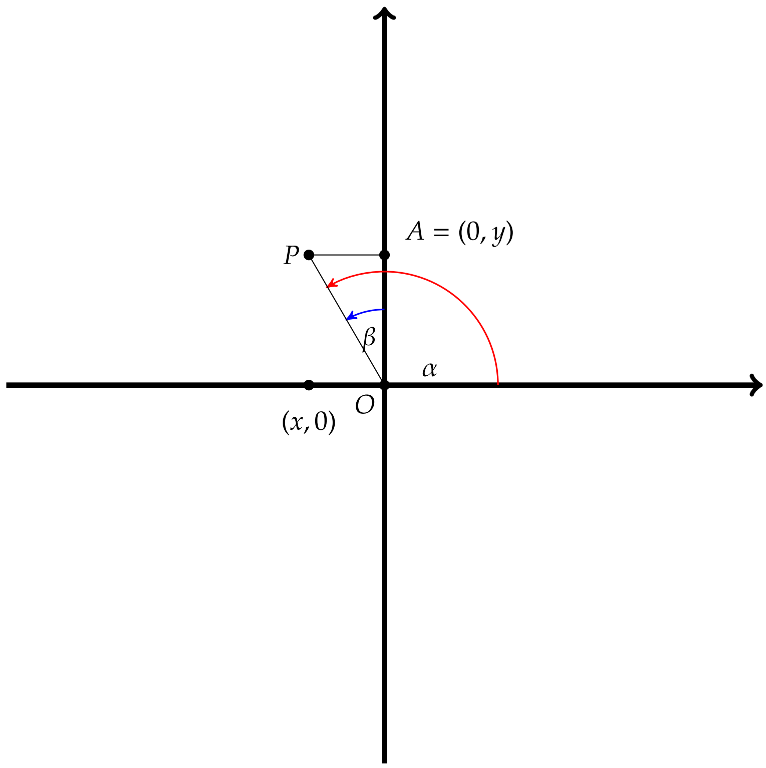



Ponieważ każdy punkt na półprostych $l$ i $s$ wyznacza dokładnie ten sam kąt, dlatego przyjmijmy, że punkty $P$, $P'$ są oddalone od punktu $O$ o długość jednej jednostki. Możemy zauważyć wtedy, że jeżeli punkt $P$ ma współrzędne $(x, y)$ to punkt $P' = (x, -y)$. Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych dostajemy:

$$
\begin{aligned}
&-\sin(\alpha) = -\frac{y}{1} = \frac{-y}{1} = \sin(-\alpha),\\
&\cos(\alpha) = \frac{x}{1} = \cos(-\alpha),\\
&-\operatorname{tg}(\alpha) = -\frac{y}{x} = \frac{-y}{x} = \operatorname{tg}(-\alpha),\\
&-\operatorname{ctg}(\alpha) = -\frac{x}{y} = \frac{x}{-y} = -\operatorname{ctg}(-\alpha).
\end{aligned}
$$

*Uwaga* 7. Zastanówmy się w jaki sposób znając jedynie wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów z przedziału $[0, \frac{\pi}{2}]$ można odczytywać wartości funkcji trygonometrycznych dla dowolnego kąta.

Zacznijmy od sporządzenia rysunku.




Zauważmy, że w ten sposób powstał trójkąt prostokątny $OAP$ oraz mamy następującą zależność między kątami: $\alpha = \beta + \frac{\pi}{2}$. Możemy więc obliczyć wartość $\sin\beta$ w trójkącie prostokątnym , tzn. $\sin\beta = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Następnie z własności wartości bezwzględnej i definicji funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta dostajemy:

$$
\sin\beta = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\cos\alpha
$$

Zatem w celu obliczenia cosinusa kąta $\alpha$ z przedziału $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ wystarczy obliczyć wartość sinusa dla kąta $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$. Dla przykładu obliczmy wartość $\cos\frac{3}{4}\pi$, ponieważ $\frac{3}{4}\pi$ mieści się w powyższym przedziale, dlatego możemy skorzystać ze wzoru, który wyprowadziliśmy:

$$\cos\frac{3}{4}\pi = \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Korzystając z podobnych argumentów możemy wyprowadzić wzory dla kątów z każdej ćwiartki. Nazywamy je **wzorami redukcyjnymi**

| | I ćwiartka | II ćwiartka | | III ćwiartka | | IV ćwiartka | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi$ | $\frac{\pi}{2} - \alpha$ | $\frac{\pi}{2} + \alpha$ | $\pi - \alpha$ | $\pi + \alpha$ | $\frac{3}{2}\pi - \alpha$ | $\frac{3}{2}\pi + \alpha$ | $2\pi - \alpha$ |
| $\sin\varphi$ | $\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ |
| $\cos\varphi$ | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ |
| $\mathrm{tg}\,\varphi$ | $\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $-\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $-\mathrm{tg}\,\alpha$ | $\mathrm{tg}\,\alpha$ | $\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $-\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $-\mathrm{tg}\,\alpha$ |
| $\mathrm{ctg}\,\varphi$ | $\mathrm{tg}\,\alpha$ | $-\mathrm{tg}\,\alpha$ | $-\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $\mathrm{tg}\,\alpha$ | $-\mathrm{tg}\,\alpha$ | $-\mathrm{ctg}\,\alpha$ |

Wybrane tożsamości trygonometryczne.

— $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;
— $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;
— $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;
— $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha}$;
— $\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$;
— $\mathrm{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$;
— $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$;
— $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$;
— $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$;
— $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$;
— $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;
— $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;
— $\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$;
— $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;
— $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;
— $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;
— $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;
— $|\sin\frac{1}{2}\alpha| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$;
— $|\cos\frac{1}{2}\alpha| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$;
— $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}x = \frac{1-\cos x}{\sin x}$;
— $\mathrm{ctg}\,\frac{1}{2}x = \frac{1+\cos x}{\sin x}$.

## Zadania obowiązkowe

**Zadanie 1.** Zamień miarę stopniową na łukową dla podanych kątów:

a) $75°$, b) $270°$,

*Szkic rozwiązania.* Do rozwiązania tego zadania wystarczy skorzystać ze wzoru $x = \frac{\alpha \cdot \pi}{180°}$.
*Uwagi metodologiczne.* Przed tym zadaniem na tablicy powinien zostać wyprowadzony powyższy wzór(Wyprowadzenie jest w przykładzie 2). *Wskazówka*: Skorzystaj ze wzoru $x = \frac{\alpha \cdot \pi}{180°}$.
*Odpowiedź*: a) $\frac{5}{12}\pi$ rad, b) $\frac{3}{2}\pi$ rad

**Zadanie 2.** Zamień miarę łukową na stopniową dla poniższych kątów:

a) $\frac{\pi}{6}$, b) $\frac{\pi}{16}$,

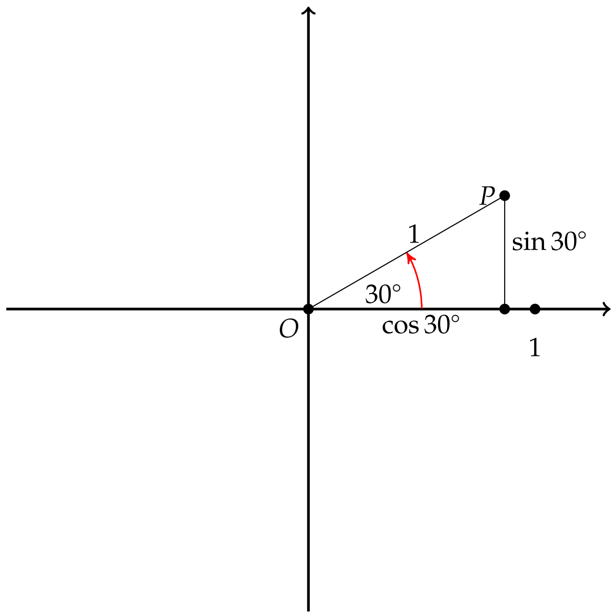
*Szkic rozwiązania.* Do rozwiązania tego zadania wystarczy skorzystać z wzoru $\alpha = \frac{x \cdot 180°}{\pi}$.
*Uwagi metodologiczne.* Przed tym zadaniem na tablicy powinien zostać wyprowadzony powyższy wzór (Wyprowadzenie jest w przykładzie 3). *Wskazówka*: Skorzystaj ze wzoru $\alpha = \frac{x \cdot 180°}{\pi}$.
*Odpowiedź*: a) $30°$, b $11,25°$,

**Zadanie 3.** Punkt $(1,0)$ obracamy wokół początku układu współrzędnych o kąt $\alpha$. Znajdź współrzędne punktu $P$, który otrzymamy, gdy kąt ten jest równy:

a) $\frac{\pi}{6}$, b) $\frac{\pi}{4}$,

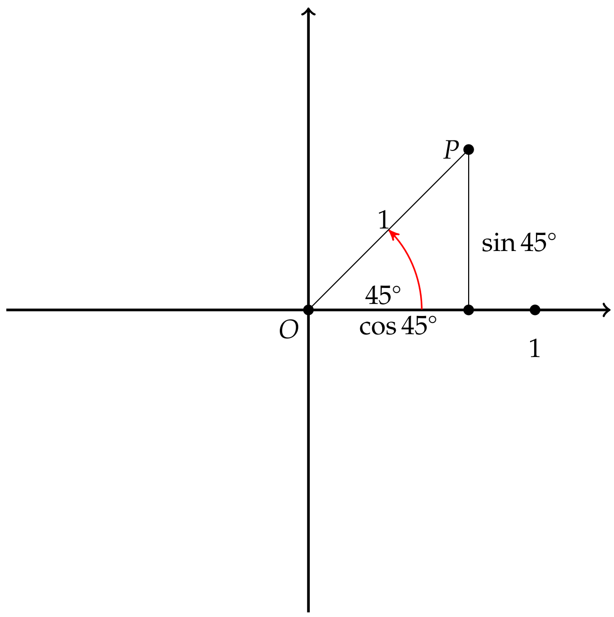
*Szkic rozwiązania.* W każdym przypadku zaczynamy zadanie od zaznaczenia punktu $(1,0)$ w układzie współrzędny, a następnie skonstruowaniu trójkąta prostokątnego którego przeciwprostokątna ma długość 1.

a)



Z rysunku wynika, że punkt $P$ ma współrzędne $P = (\cos 30°, \sin 30°)$, stąd dostajemy $P = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

b)




Z rysunku wynika, że punkt $P$ ma współrzędne $P = (\cos 45°, \sin 45°)$, stąd dostajemy $P = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

*Uwagi metodologiczne.* Przy tym zadaniu warto wspomnieć o współrzędnych biegunowych. *Wskazówka*: Narysuj półprostą nachyloną do dodatniej półosi $OX$ pod kątem $\alpha$, a następnie zaznacz na niej punkt w odległości 1 od środka układu współrzędnych i skorzystaj z funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym.

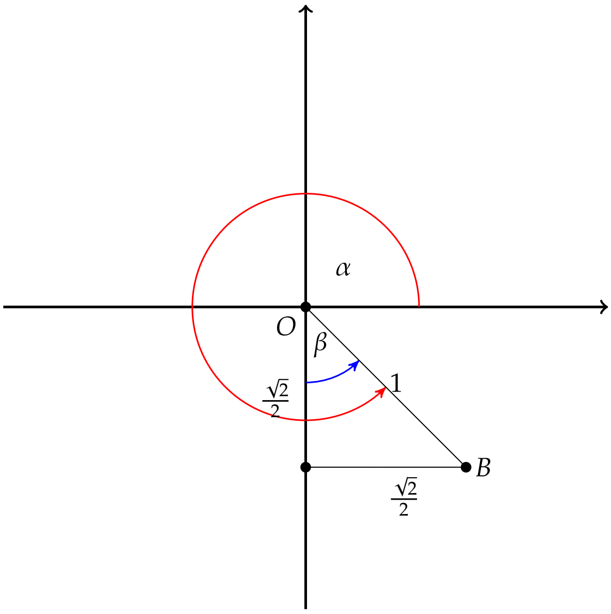
*Odpowiedź*: a) $P = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$, b) $P = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$,

**Zadanie 4.** Znajdź najmniejszy kąt dodatni o jaki należy obrócić punkt $P = (1, 0)$ wokół początku układu współrzędnych, aby otrzymać punkty:

a) $B = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, b) $C = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

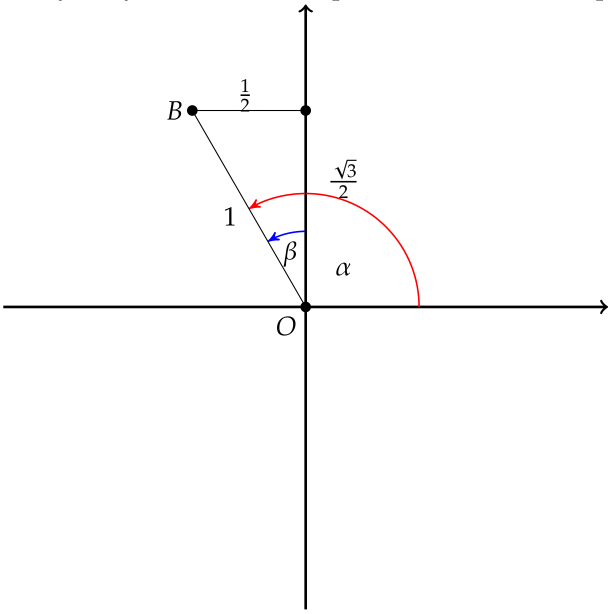
*Szkic rozwiązania.*

a) Zaczynamy od zaznaczenia punktu w układzie współrzędnych:




Teraz zauważmy, że $\alpha = \frac{3\pi}{2} + \beta$. W celu obliczenia kąta $\beta$, możemy wykorzystać trójkąt prostokątny, którego wymiary są pokazane na rysunku. Mamy równość $\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, a równość ta zachodzi dla kąta $\beta = \frac{\pi}{4}$. Stąd dostajemy $\alpha = \frac{7}{4}\pi = 315°$.

b) Zaczynamy od zaznaczenia punktu w układzie współrzędnych:




Teraz zauważmy, że $\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta$. W celu obliczenia kąta $\beta$, możemy wykorzystać trójkąt prostokątny, którego wymiary są pokazane na rysunku. Mamy równość $\sin\beta = \frac{1}{2}$, a równość ta zachodzi dla kąta $\beta = \frac{\pi}{6}$. Stąd dostajemy $\alpha = \frac{4}{6}\pi = 120°$.

*Wskazówka*: Zaznacz punkt w układzie współrzędnych a następnie skorzystaj z funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym.

*Odpowiedź*: a) $\alpha = \frac{7}{4}\pi = 315°$, b) $\alpha = \frac{4}{6}\pi = 120°$.

**Zadanie 5.** Korzystając z poniższych informacji obliczyć wartości funkcji $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

a) $\cos x = -\frac{3}{4}$ oraz $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$,

b) $\sin x = -\frac{1}{2}$ oraz $x \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$.

*Wskazówka*: Skorzystaj z jedynki trygonometrycznej i sprawdź jaki znak przymuje funkcja sin oraz cos w odpowiednich ćwiartkach.

*Szkic rozwiązania.*

a) Na początku skorzystajmy z jedynki trygonometrycznej

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Stąd dostajemy

$$\begin{aligned} &\sin^2 x + \frac{9}{16} = 1 \\ &\sin^2 x = \frac{7}{16} \\ &\sin x = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \vee \quad \sin x = -\frac{\sqrt{7}}{4} \end{aligned}$$

Wiemy, że $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, więc $\sin x > 0$. Zatem $\sin x = \frac{\sqrt{7}}{4}$.
Teraz możemy obliczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{-3}{4}} = -\frac{\sqrt{7}}{3} \\ \operatorname{ctg} x &= \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\frac{-3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = -\frac{3\sqrt{7}}{7} \end{aligned}$$

b) Na początku skorzystajmy z jedynki trygonometrycznej

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Stąd dostajemy

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4} + \cos^2 x = 1 \\ &\cos^2 x = \frac{3}{4} \\ &\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Wiemy, że $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, więc $\cos x > 0$. Zatem $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Teraz możemy obliczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \operatorname{ctg} x &= \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{-1}{2}} = -\sqrt{3}. \end{aligned}$$

*Uwagi metodologiczne.*
*Odpowiedź*: a) $\sin x = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\cos x = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{7}}{3}$, $\operatorname{ctg} x = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$, b) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$

**Zadanie 6.** Wartość podanego wyrażenia jest liczbą dodatnią czy ujemną? Rozwiązać jeden z poniższych przykładów.

a) $\sin 547^\circ \cos 421^\circ \operatorname{tg} 123^\circ$ b) $\frac{\cos(-153^\circ)}{\sin 179^\circ}$

c) $\sin 348^\circ - \operatorname{ctg} 909^\circ + \cos 269^\circ$ d) $\frac{\operatorname{tg}(-301^\circ)\sin 1304^\circ}{\cos 192^\circ \operatorname{ctg}(-271^\circ)}$

*Wskazówka*: Skorzystaj z okresowości funkcji trygonometrycznej ($\sin\alpha$, $\cos\alpha$-$2\pi$; $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$- $\pi$), a następnie określ znak funkcji w przedziale $[0, 2\pi)$

*Szkic rozwiązania.*

Wiemy, że
— sinus jest dodatni w pierwszej i drugiej ćwiartce, a ujemny w trzeciej i czwartej;
— cosinus jest dodatni w pierwszej i czwartej ćwiartce, a ujemy w drugiej i trzeciej;
— tangens jest dodatni w pierwszej i trzeciej, a ujemny w drugiej i czwartej;
— cotangens jest dodatni w pierwszej i trzeciej, a ujemny w drugiej i czwartej.

a) Ponieważ wiemy, że funkcje sin oraz cos posiadają okres 360°, a funkcja tg posiada okres 180°. Dlatego możemy zapisać:

$$\sin 547^\circ \cos 421^\circ \operatorname{tg} 123^\circ = \sin 187^\circ \cos 61^\circ \operatorname{tg}(-57^\circ)$$

Zatem dostajemy, że $\sin 187^\circ < 0$, $\cos 61^\circ > 0$, $\operatorname{tg} 123^\circ < 0$. Ponieważ dwie wartości są ujemne, a jedna dodatnia dlatego ich iloczyn będzie dodatni.

b) Ponieważ $\cos(-153^\circ) = \cos 153^\circ < 0$ oraz $\sin 179^\circ > 0$, zatem ich iloraz również jest liczbą ujemną.

c) Z okresowości funkcji trygonometrycznych dostajemy:

$$\sin 348^\circ - \operatorname{ctg} 909^\circ + \cos 269^\circ = \sin 348^\circ - \operatorname{ctg} 9^\circ + \cos 269^\circ$$

Stąd mamy $\sin 348^\circ < 0$, $\operatorname{ctg} 9^\circ > 0$, $\cos 269^\circ < 0$, zatem od dwóch wartości ujemnych($\sin 348^\circ$, $\cos 269^\circ$) odejmujemy wartość dodatnią($\operatorname{ctg} 909^\circ$) dlatego wartość wyrażenia jest ujemna.

d) Z okresowości funkcji trygonometrycznych dostajemy:

$$\frac{\operatorname{tg}(-301^\circ)\sin 1304^\circ}{\cos 192^\circ \operatorname{ctg}(-271^\circ)} = \frac{\operatorname{tg} 59^\circ \sin 224^\circ}{\cos 192^\circ \operatorname{ctg} 89^\circ}$$

Stąd mamy $\operatorname{tg} 59^\circ > 0$, $\sin 224^\circ < 0$, $\cos 192^\circ < 0$, $\operatorname{ctg} 89^\circ > 0$, zatem wartość tego wyrażenia jest dodatnia.

*Odpowiedź*: a) +, b) -, c) -, d) +

**Zadanie 7.** Obliczyć:
a) $\sin 75^\circ$;
b) $\cos 105^\circ$;
c) $\operatorname{tg} 15^\circ$.

*Wskazówka*: Skorzystaj z wzorów na $\sin(\alpha \pm \beta)$ oraz $\cos(\alpha \pm \beta)$.

*Szkic rozwiązania.*

a) $\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$
b) $\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$
c) $\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sin(45^\circ-30^\circ)}{\cos(45^\circ-30^\circ)} = \frac{\sin 45^\circ \cos(-30^\circ)+\sin(-30^\circ)\cos(45^\circ)}{\cos 45^\circ \cos(-30^\circ)-\sin 45^\circ \sin(-30^\circ)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+(-\frac{1}{2})\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

*Odpowiedź*: a) $\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$, b) $\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$, c) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

**Zadanie 8.** Korzystając ze wzoru $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, uzasadnij wybraną tożsamość trygonometryczną:
a) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$;
b) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$;
c) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.
*Wskazówka*: Skorzystaj z parzystości i nieparzystości funkcji sin, cos oraz wzorów redukcyjnych.

*Szkic rozwiązania.*
a) $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$;
b) $\cos(\alpha+\beta) = \sin(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)) = \sin((\frac{\pi}{2}-\alpha) + (-\beta)) = \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cos(-\beta) + \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$;
c) $\cos(\alpha-\beta) = \sin(\frac{\pi}{2} - (\alpha-\beta))\sin((\frac{\pi}{2}-\alpha)+\beta) = \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cos\beta + \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

**Zadanie 9.** Sprawdzić tożsamości trygonometryczne:
a) $\sin 7x \operatorname{tg} 3,5x + \cos 7x = 1$
b) $\sin^2(\frac{7\pi}{2} - x) + \frac{1-\cos x}{2} - \sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$;.
*Wskazówka*: Skorzystaj z wzorów które znajdują się na końcu częśći z teorią.

*Szkic rozwiązania.*
a) $\sin 7x \operatorname{tg} 3,5x + \cos 7x = \frac{2\sin 3,5x\cos 3,5x \sin 3,5x}{\cos 3,5x} + \cos^2 3,5x - \sin^2 3,5x = 2\sin^2 3,5x + \cos^2 3,5x - \sin^2 3,5x = 1$;
b) $L = \sin^2(\frac{7\pi}{2} - x) + \frac{1-\cos x}{2} - \sin 2x = \sin^2(\frac{3\pi}{2} - x) + \sin^2\frac{x}{2} - \sin 2x = \cos^2 x + \sin^2\frac{x}{2} - \sin 2x = 1 - \sin 2x - \sin^2 x + \sin^2\frac{x}{2}$,
$P = (\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x\cos x = 1 - \sin 2x$;
*Odpowiedź*: a) Tak, b) Nie

## Zadania dodatkowe

**Zadanie 10.** Zamień miarę stopniową na łukową dla podanych kątów:

| | |
|---|---|
| a) $60^\circ$, | b) $30^\circ$, |
| c) $45^\circ$, | d) $5^\circ$. |

*Wskazówka*: Skorzystaj ze wzoru $x = \frac{\alpha\cdot\pi}{180^\circ}$.
*Szkic rozwiązania.* Do rozwiązania tego zadania wystarczy skorzystać ze wzoru $x = \frac{\alpha\cdot\pi}{180^\circ}$.
*Odpowiedź*: a) $\frac{\pi}{3}$ rad, b) $\frac{\pi}{6}$ rad, c) $\frac{\pi}{4}$ rad, d) $\frac{\pi}{36}$

**Zadanie 11.** Zamień miarę łukową na stopniową dla poniższych kątów:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $\frac{5}{6}\pi$, | b) | $\frac{5}{4}\pi$, |
| c) | $\frac{11}{20}\pi$, | d) | $\frac{2}{9}\pi$. |

*Wskazówka*: Skorzystaj ze wzoru $\alpha = \frac{x \cdot 180^\circ}{\pi}$.

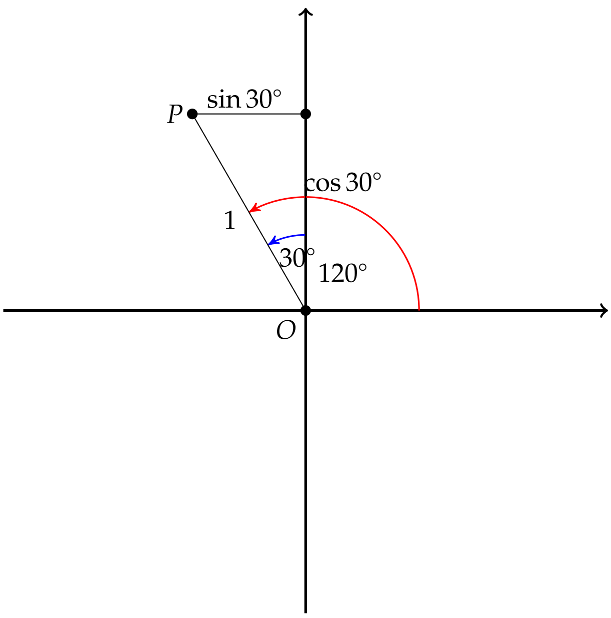
*Szkic rozwiązania.* Do rozwiązania tego zadania wystarczy skorzystać z wzoru $\alpha = \frac{x \cdot 180^\circ}{\pi}$.
*Odpowiedź*: a) $150^\circ$, b) $225^\circ$, c) $99^\circ$, d) $40^\circ$

**Zadanie 12.** Punkt $(1, 0)$ obracamy wokół początku układu współrzędnych o kąt $\alpha$. Znajdź współrzędne punktu $P$, który otrzymamy, gdy kąt ten jest równy:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $\frac{2}{3}\pi$, | b) | $\frac{5}{4}\pi$, |
| c) | $\frac{11}{6}\pi$, | d) | $\frac{3}{2}\pi$. |

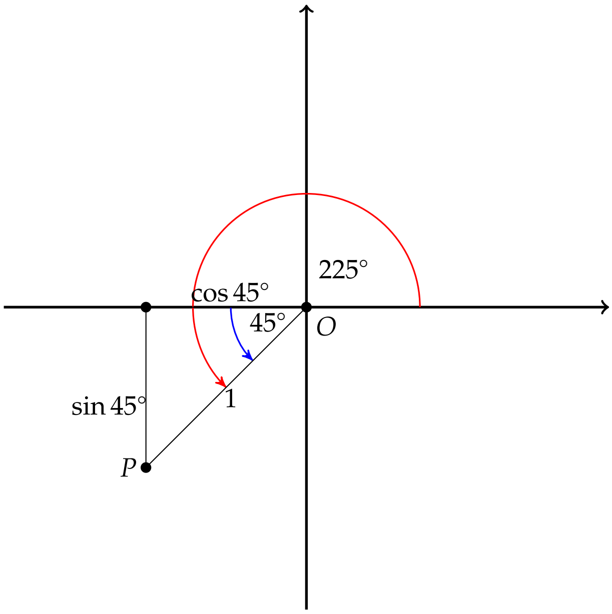
*Wskazówka*: Narysuj półprostą nachyloną do półosi $OX$ pod kątem $\alpha$, a następnie zaznacz na niej punkt w odległości 1 od środka układu współrzędnych i skorzystaj z funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym.

*Szkic rozwiązania.* W każdym przypadku zaczynamy zadanie od zaznaczenia punktu $P$ w układzie współrzędny, a następnie skonstruowaniu trójkąta prostokątnego którego przeciwprostokątna ma długość 1.
a)



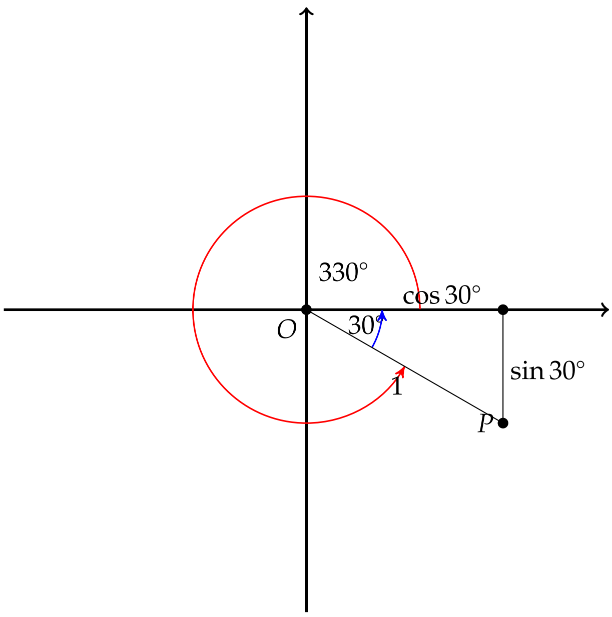

Z rysunku wynika, że punkt $P$ ma współrzędne $P = (-\sin 30^\circ, \cos 30^\circ)$, stąd dostajemy $P = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

b)



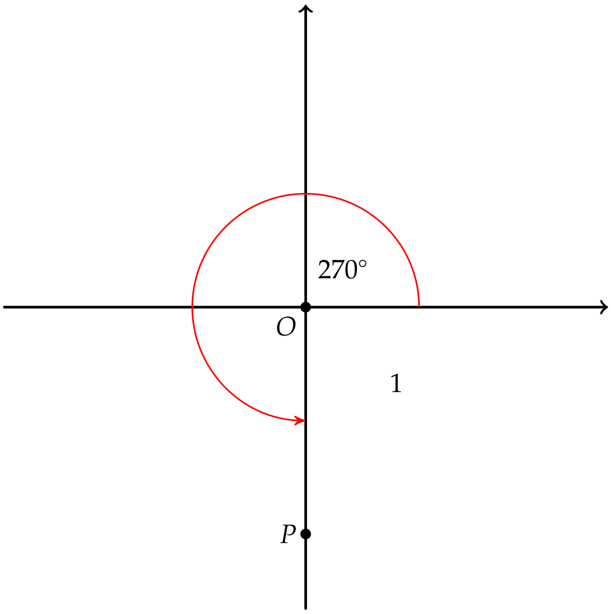

Z rysunku wynika, że punkt $P$ ma współrzędne $P = (-\cos 45°, -\sin 45°)$, stąd dostajemy $P = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

c)




Z rysunku wynika, że punkt $P$ ma współrzędne $P = (\cos 30°, -\sin 30°)$, stąd dostajemy $P = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$.

d)




Z rysunku wynika, że punkt $P$ ma współrzędną $x = 0$, a ponieważ punkt $P$ był oddalony od początku układu o jedną jednostkę, to współrzędne punktu są równe $P = (0, -1)$.

*Uwagi metodologiczne.* Przy tym zadaniu warto wspomnieć o współrzędnych biegunowych.

*Odpowiedź*: a) $P = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, b) $P = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, c) $P = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, d)$P = (0, 1)$

**Zadanie 13.** Uzasadnić następujące tożsamości trygonometryczne:

a) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$;

b) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$;

c) $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$.

*Wskazówka*: a) Rozpisać prawą stronę(zamienić $\operatorname{tg}\alpha$ na iloraz $\sin\alpha / \cos\alpha$) a następnie skorzystać z wzorów na $\sin\alpha \pm \beta$, $\cos\alpha \pm \beta$. Dla podpunktów b i c skorzystaj z a.

*Szkic rozwiązania.*

a) $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta})\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$;

b) z podpunktu a) oraz własności tg;

c) z podpunktu a) .

**Zadanie 14.** Uzasadnić następujące tożsamości trygonometryczne:

a) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

b) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;

c) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

d) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

*Wskazówka*: Skorzystaj z podstawienia $\alpha = u + v$, $\beta = u - v$.

*Szkic rozwiązania.*

a) Przyjmijmy oznaczenia $\alpha = u + v$, $\beta = u - v$, wtedy dostajemy:

$$\sin(u + v) + \sin(u - v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v + \sin u \cos v - \cos u \sin v = 2\sin u \cos v$$

Ponieważ $u = \frac{\alpha+\beta}{2}$ i $v = \frac{\alpha-\beta}{2}$ dostajemy

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

b) Stosujemy zamianę $\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ i $\cos\beta = \sin(\frac{\pi}{2} - \beta)$ i korzystamy z podpunktu a);
c) Analogicznie do podpunktu b).

**Zadanie 15.** Uzasadnić następujące tożsamości trygonometryczne:
a) $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = \sin^2 x$;
b) $\frac{\sin x + \cos x}{\cos x} - \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} - \cos x + 1$;
c) $\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$;

*Szkic rozwiązania.*
a) $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\sin x(\sin x \cos x)}{\cos x(\sin^2 x + \cos^2 x)} = \sin^2 x$
b)

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin x + \cos x}{\cos x} - \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} - \cos x + 1\\
&\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x} - \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} - \cos x + 1\\
&\operatorname{tg} x + 1 - \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} - \cos x + 1\\
&1 = \frac{\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}} - \cos x + 1\\
&1 = \cos x - \cos x + 1\\
&1 = 1
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
&\sin(x+y)\sin(x+y) = (\sin x\cos y + \sin y\cos x)(\sin x\cos y - \sin y\cos x) =\\
&\sin^2 x(1-\sin^2 y) - \sin^2 y(1-\sin^2 x) =\\
&\sin^2 x - \sin^2 x\sin^2 y - \sin^2 y + \sin^2 x\sin^2 y = \sin^2 x - \sin^2 y
\end{aligned}$$

*Odpowiedź*: a) Tak, b) Tak, c) Tak

**Zadanie 16.** Oblicz:
a) $\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \cdots + \sin 358^\circ + \sin 359^\circ$;
b) $\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cdots + \cos 178^\circ + \cos 179^\circ$.
*Wskazówka*:
a) Korzystamy z wzoru $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ i sumujemy skrajne elementy,
b) Korzystamy z wzoru $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ i sumujemy skrajne elementy
*Szkic rozwiązania.*
a) Korzystamy z wzoru $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ i sumujemy skrajne elementy,
b) Korzystamy z wzoru $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ i sumujemy skrajne elementy

*Odpowiedź*: a) 0, b) 0

## Zadania domowe

**Zadanie 17.** Zamienić miarę stopniową na łukową dla kątów:

a) $5°$, b) $-300°$,

c) $20°$, d) $-272°$.

*Wskazówka*: Skorzystaj ze wzoru $x = \frac{\alpha \cdot \pi}{180°}$.
*Odpowiedź*: a) $\frac{1}{36}\pi$, b) $-\frac{5}{3}\pi$, c) $\frac{1}{9}\pi$, d) $-\frac{68}{45}\pi$

**Zadanie 18.** Zamienić miarę łukową na stopniową dla kątów:

a) $\frac{3}{4}\pi$, b) $-\frac{12}{5}\pi$,

c) $10\pi$, d) $-\frac{1}{180}\pi$.

*Wskazówka*: Skorzystaj ze wzoru $\alpha = \frac{x \cdot 180°}{\pi}$.
*Odpowiedź*: a) $135°$, b) $-432°$, c) $1800°$, d) $-1°$

**Zadanie 19.** Określić znak każdej z funkcji trygonometrycznych dla kątów:

a) $\frac{10}{3}\pi$, b) $-\frac{4}{3}\pi$.

*Wskazówka*: Narysuj wykres funkcji $\sin x$ oraz $\cos x$, a następnie skorzystaj z okresowości funkcji trygonometrycznych.
*Odpowiedź*: a) $\sin \frac{10}{3}\pi < 0$, $\cos \frac{10}{3}\pi < 0$, $\mathrm{tg}\, \frac{10}{3}\pi > 0$, $\mathrm{ctg}\, \frac{10}{3}\pi > 0$, b) $\sin(-\frac{4}{3}\pi) > 0$, $\cos(-\frac{4}{3}\pi) < 0$, $\mathrm{tg}(-\frac{4}{3}\pi) < 0$, $\mathrm{ctg}(-\frac{4}{3}\pi) < 0$.

**Zadanie 20.** Obliczyć, korzystając ze wzorów redukcyjnych oraz okresowości funkcji trygonometrycznych:

a) $\sin \frac{3}{2}\pi$, b) $\mathrm{ctg}\, \frac{3}{4}\pi$,

c) $\mathrm{ctg}(-\frac{23}{4}\pi)$, d) $\cos \frac{407}{6}\pi$.

*Odpowiedź*: a) $-1$, b) $-1$, c) $1$, d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**Zadanie 21.** Podane liczby uporządkować rosnąco

a) $a = \cos 0$, $b = \cos 1$, $c = \cos \frac{\pi}{3}$, $d = \cos \pi$;

b) $a = \mathrm{ctg}\, \frac{\pi}{6}$, $b = \mathrm{ctg}\, \frac{\pi}{3}$, $c = \mathrm{ctg}\, 3$, $d = \mathrm{ctg}\, \frac{\pi}{2}$.

*Wskazówka*: Skorzystaj z monotoniczności funkcji trygonometrycznych w odpowiednich przedziałach.
*Odpowiedź*: a) $d < c < b < a$, b) $c < d < b < a$.

## Literatura

— M. Kurczab, E. Kurczab, E.Świda, Matematyka Podręcznik do liceów i techników klasa 1, Oficyna Edukacyjna, 2010.
— M. Kurczab, E. Kurczab, E.Świda, Matematyka Zbiór zadań do liceów i techników klasa 1, Oficyna Edukacyjna, 2010.
— M. Braun, M. Dobrowolska, M. Karpiński, J. Lech, E. Zamościńska,Matematyka II Zbiór zadań dla liceum i technikum, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 2005.
— N. Dróbka, K. Szymański, Zbiór zadań z matematyki dla kl. I i II liceum ogólnokształcącego, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1994.