Wektory

dr Jolanta Grala-Michalak

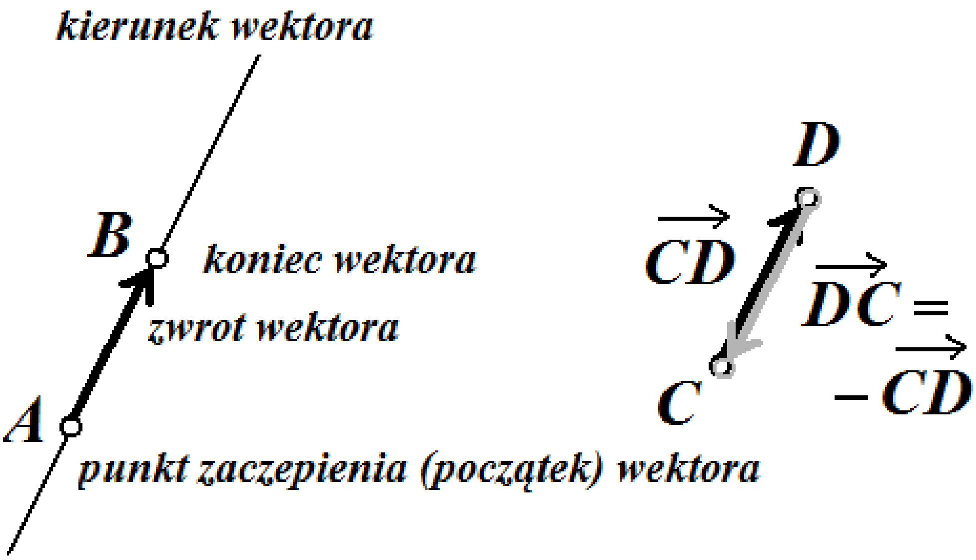
Teoria

Uważa się, że pierwszym podręcznikiem geometrii jest dzieło Euklidesa "Elementy", napisane w III wieku p.n.e. Opisywana w nim płaszczyzna i przestrzeń zawierają różne obiekty takie, jak: punkty, odcinki, figury (płaskie) i bryły (przestrzenne). Określone jest pojęcie równoległości i prostopadłości, brakuje jednak zorientowania płaszczyzny i przestrzeni. Dopiero, w wydanym w 1637 roku n.e. dziele "Geometria", Kartezjusz (Rene Descartes, 1596-1650) przedstawił pomysł wprowadzenia prostokątnego układu współrzędnych. Są to wzajemnie prostopadłe proste przecinające się w ustalonym punkcie, zwanym początkiem układu współrzędnych. Nałożenie tego układu, utworzonego przez dwie proste, na płaszczyznę (lub przez trzy proste, na przestrzeń) umożliwiło opis obiektów za pomocą tzw. współrzędnych. Współrzędne te, są to uporządkowane pary (na płaszczyźnie) albo trójki liczb rzeczywistych (w trójwymiarowej przestrzeni).

Geometrię na płaszczyźnie nazywamy planimetrią, a geometrię przestrzeni (trójwymiarowej) zwiemy stereometrią.

W określeniu wektora zaczepionego, zwanego czasem wektorem związanym, widoczna jest koncepcja Kartezjusza, zaś w definicji wektorów swobodnych - podejście Euklidesa.

Definicja 1. Wektorem zaczepionym $\overrightarrow{AB}$ (na płaszczyźnie lub w przestrzeni) nazywamy uporządkowaną parę punktów (A, B) (płaszczyzny, lub odpowiednio, przestrzeni), z których pierwszy, czyli A, nazywamy początkiem wektora, a drugi, czyli B, jego końcem. Kierunek uporządkowania punktów A i B w tej parze nazywa się zwrotem wektora. Kierunkiem wektora $\overrightarrow{AB}$ nazywamy prostą przechodzacą przez punkty A i B.



Definicja 2. Wektorem przeciwnym do wektora $\overrightarrow{AB}$ zaczepionego w punkcie A, nazywamy wektor $\overrightarrow{BA}$ o początku w punkcie B i końcu w punkcie A, który oznaczamy przez $-\overrightarrow{AB}$.

Definicja 3. Zaczepionym wektorem zerowym nazywamy każdy wektor o początku i końcu w tym samym punkcie.

Uwaga 1. Takich wektorów jest nieprzeliczalnie wiele; tyle samo, ile jest punktów na płaszczyźnie.

Szczególnym rodzajem wektorów zaczepionych są wersory.

Definicja 4. Wersorem kartezjańskiego układu współrzędnych nazywamy każdy wektor zaczepiony w początku tego układu, o długości równej jednostce, leżącym na osi układu współrzędnych. Wersory płaszczyzny oznaczamy symbolami $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, a wersory przestrzeni zapisujemy jako $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ oraz $\overrightarrow{k}$.

Definicja 5. Długością (lub modułem) wektora zaczepionego $\overrightarrow{AB}$ nazywamy odległość punktów A i B. Długość wektora oznaczamy symbolem $|\overrightarrow{AB}|$.

Z własności odległości wynika, że wektor zaczepiony $\overrightarrow{AB}$ i przeciwny do niego $-\overrightarrow{AB}$ mają tę samą długość oraz, że wektory zerowe mają długość równą zero.

Uwaga 2. Załóżmy, że punkt A płaszczyzny (przestrzeni) ma współrzędne (x_A, y_A) (odpowiednio (x_A, y_A, z_A)), a punkt B ma współrzędne (x_B, y_B) (odpowiednio (x_B, y_B, z_B)). Wtedy długość wektora zaczepionego $\overrightarrow{AB}$ oblicza się ze wzoru na długość przeciwprostokątnej w trójkącie prostokątnym

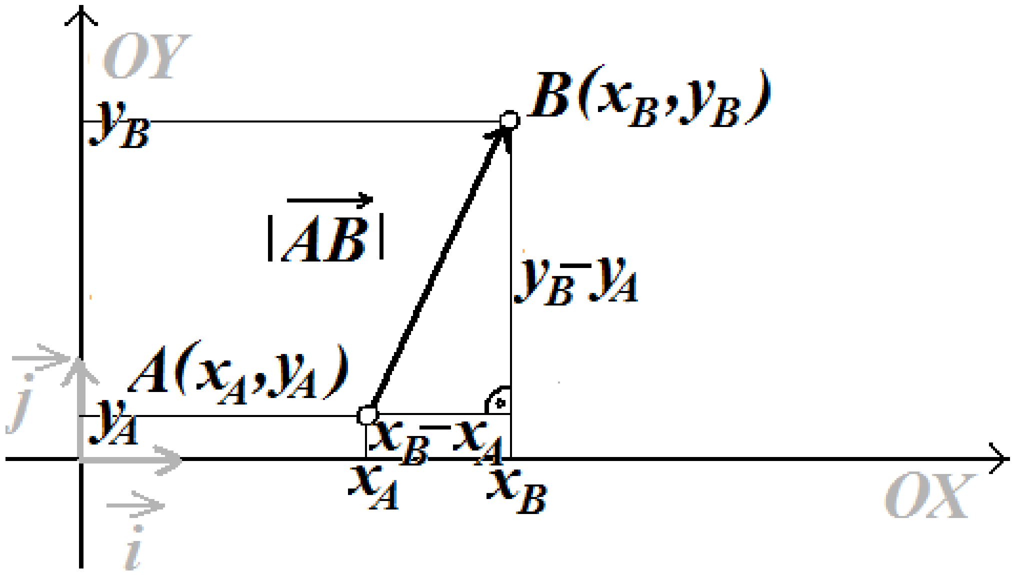
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2},$$

(na płaszczyźnie) lub, odpowiednio

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

(w przestrzeni).

Odległość $|\overrightarrow{AB}|$ nosi nazwę odległości euklidesowej.



Przykład 1. Niech w przestrzeni dane będą punkty A, B, C o współrzędnych, odpowiednio, $A(1, 3, 4), B(-2, 0, 1), C(3, 5, 1)$.
(a) Znaleźć długości wszystkich wektorów zaczepionych, wyznaczonych przez te punkty.
(b) Która para punktów leży w największej odległości od siebie?
(c) Czy trójkąt ABC jest prostokątny?
Najpierw obliczmy długość wektora zaczepionego $\overrightarrow{AB}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2-1)^2 + (0-3)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} = |\overrightarrow{BA}|.$$

Dla pozostałych wektorów zaczepionych otrzymujemy

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(3-1)^2 + (5-3)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{17} = |\overrightarrow{CA}|,$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(3-(-2))^2 + (5-0)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = |\overrightarrow{CB}|.$$

Punkty B i C leżą najdalej od siebie (mierząc odległością euklidesową). Nie jest to trójkąt prostokątny, bo nie spełnia tezy twierdzenia Pitagorasa.

Na wektorach zaczepionych można wykonywać operacje dodawania, odejmowania i mnożenia przez skalar.

Definicja 6. Sumą wektorów zaczepionych $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ nazywamy wektor zaczepiony $\overrightarrow{AC}$ o początku w punkcie A i końcu w punkcie C, co zapisujemy następująco

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Dwa wektory zaczepione które dodajemy, $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$, oraz wektor $\overrightarrow{AC}$ będący ich sumą tworzą trójkąt. Jeśli punkty A, B i C są współliniowe, to trójkąt ten redukuje się do odcinka. Warto też zauważyć, że do wektora zaczepionego można dodać tylko wektor, którego początek pokrywa się z końcem pierwszego wektora.

Dzięki zasadzie indukcji matematycznej można udowodnić, że dodawanie skończonej ilości wektorów odpowiednio zaczepionych jest wykonalne, tzn.

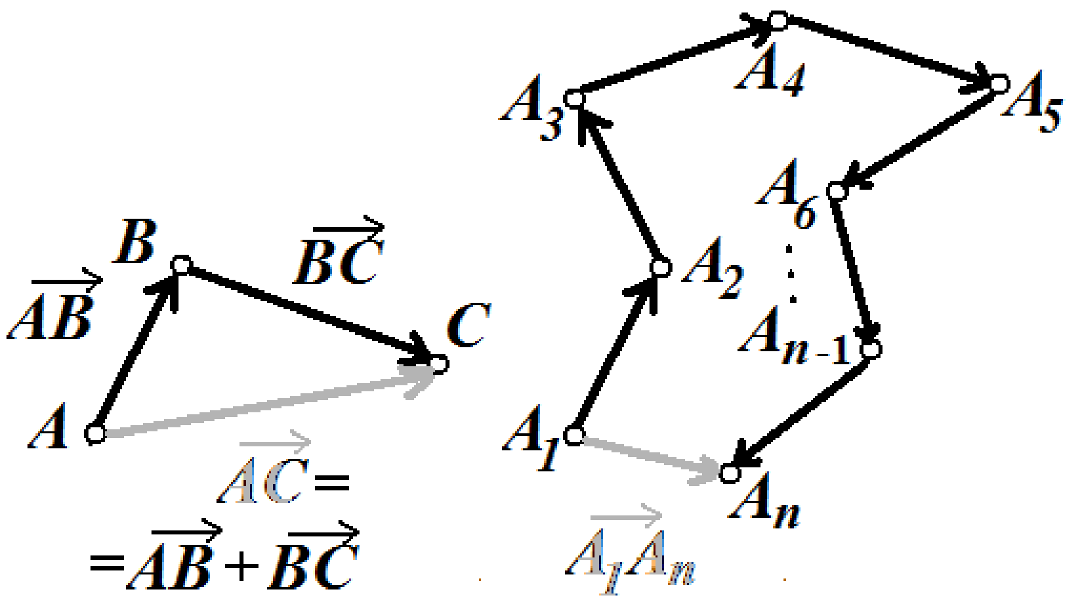
$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + ... + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$$

dla dowolnych punktów $A_1, A_2, ..., A_n$. Ponadto suma wektora zaczepionego i wektora przeciwnego do niego jest zaczepionym wektorem zerowym, więc

$$\overrightarrow{A_1A_n} + (-\overrightarrow{A_1A_n}) = \overrightarrow{A_1A_n} + \overrightarrow{A_nA_1} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + ... + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_nA_1} = \overrightarrow{A_1A_1}.$$

Niezerowe wektory zaczepione $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, ... , $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$, $\overrightarrow{A_nA_1}$ tworzą łamaną zamkniętą (dla $n > 2$).

Odejmowanie wektora zaczepionego od wektora zaczepionego określa się jako dodanie wektora przeciwnego do odjemnika, jeśli dodawanie to jest wykonalne.



Definicja 7. Różnicą wektorów zaczepionych $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CB}$ nazywamy wektor $\overrightarrow{AC}$, ponieważ

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Przykład 2. Na płaszczyźnie znaleźć obraz C' punktu $C(x_0, y_0)$ po przesunięciu go o wektor (zaczepiony) $\overrightarrow{CD}$, gdzie D jest punktem o współrzędnych $D(x_1, y_1)$.

W rozwiązaniu można wykorzystać operację dodawania wektorów zaczepionych. Punkt C będzie reprezentował wektor zerowy w nim zaczepiony. Dodajmy do niego wektor $\overrightarrow{CD}$ zaczepiony w punkcie C. Suma wektorów, czyli wektor zaczepiony $\overrightarrow{CD}$ ma koniec w punkcie $D(x_1, y_1)$. Stąd obrazem punktu C w przesunięciu o wektor $\overrightarrow{CD}$ bedzie punkt $C' = (x_1, y_1) = D$.

Na wektorach $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ zaczepionych w tym samym punkcie można zbudować równoległobok $ABDC$, przesuwając odcinek AB o wektor $\overrightarrow{AC}$ oraz odcinek AC o wektor $\overrightarrow{AB}$ i oznaczając przez D punkt wspólny wektorów po przesunięciu. Różnica wektorów

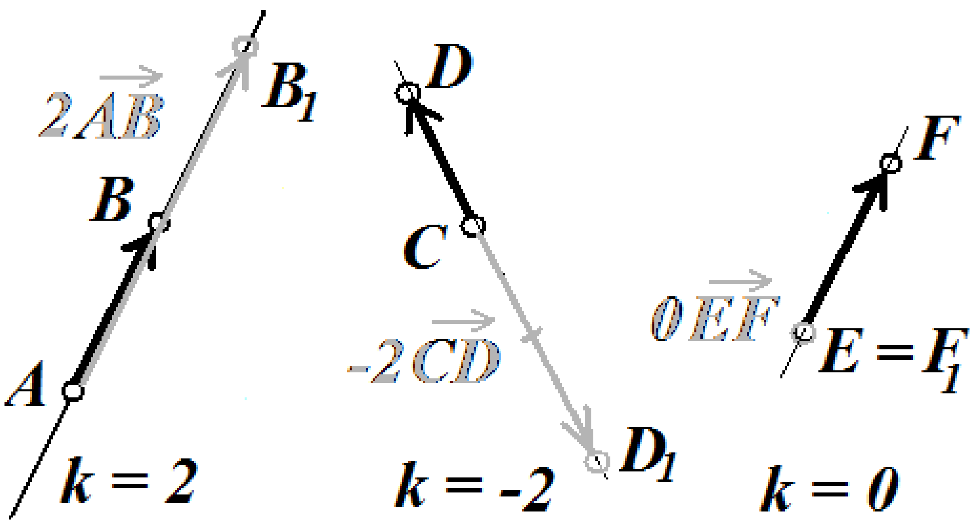
$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - (-\overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$$

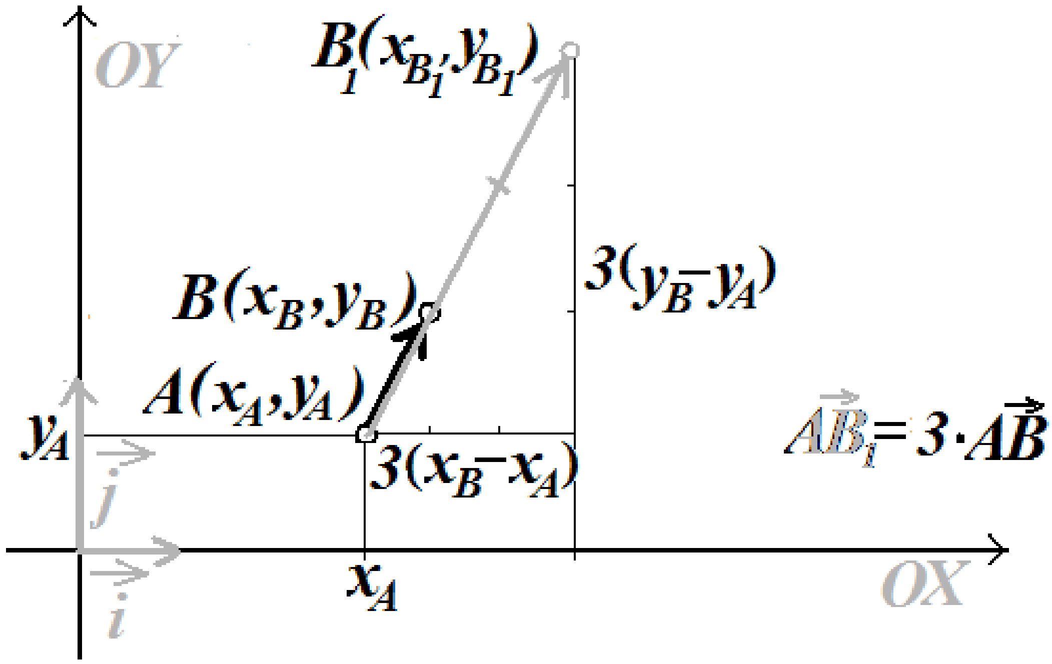
jest wektorem zaczepionym $\overrightarrow{CB}$, leżącym na przekątnej tego równoległoboku. Na drugiej przekątnej leży wektor zaczepiony będący sumą $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Wektory te można dodać dopiero po przesunięciu jednego z nich o drugi wektor.

Zaczepione wektory zerowe mają ciekawe własności, podane w poniższym lemacie.

Lemat 1. *Dla każdego wektora zerowego zachodzą poniższe prawidłowości.*
(a) Suma dwóch wektorów zaczepionych, z których jeden jest zerowy, jest równa drugiemu wektorowi.
(b) Suma dwóch wektorów zaczepionych wzajemnie przeciwnych jest wektorem zerowym.
(c) Zaczepionym wektorem przeciwnym do wektora zerowego jest ten sam wektor zerowy.

Definicja 8. Iloczynem wektora zaczepionego $\overrightarrow{AB}$ przez skalar k nazywamy wektor zaczepiony $\overrightarrow{AB_1}$, o początku w punkcie A i końcu w punkcie B_1, leżący na prostej AB, taki, że $|k| \cdot |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AB_1}|$.
(a) Jeżeli $k > 0$, to punkty B i B_1 znajdują się na tej samej półprostej o początku w punkcie A (wtedy o wektorach $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AB_1}$ mówimy, że mają zgodne zwroty).
(b) Jeżeli $k < 0$, to wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AB_1}$ mają przeciwny zwrot, tzn. punkty B i B_1 leżą na prostej AB po przeciwnych stronach punktu A.
(c) Jeśli $k = 0$, to wynik mnożenia jest wektorem zerowym $\overrightarrow{AA}$.

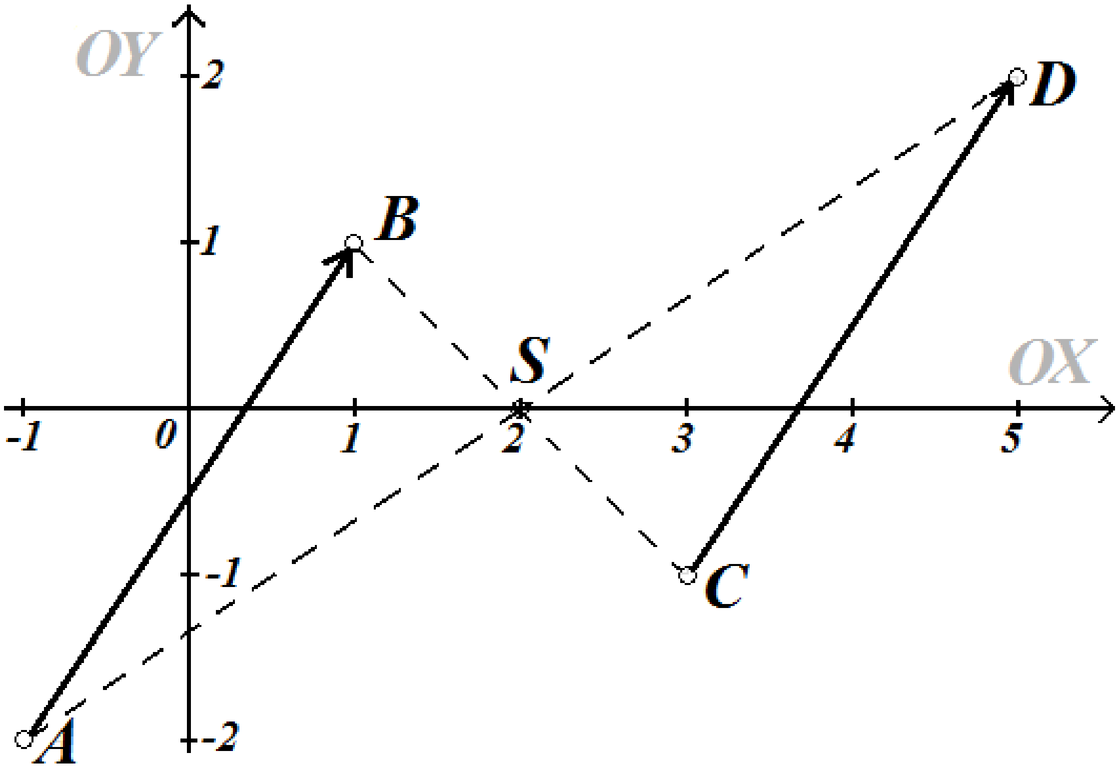




Uwaga 3. Jeśli $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$, to punkt B_1 z powyższej definicji ma współrzędne $(x_A + k(x_B - x_A), y_A + k(y_B - y_A))$.

Przekształcenie to, zachowujące stosunek odległości punktów, zwane jest jednokładnością lub homotetią o skali k i środku w punkcie A.

Rozważmy teraz pewną interesującą konstrukcję opartą na parze wektorów zaczepionych.



Przykład 3. Na płaszczyźnie dane są punkty $A(-1, -2)$, $B(1, 1)$, $C(3, -1)$ oraz $D(5, 2)$. W układzie współrzędnych kartezjańskich zaznaczyć wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$. Połączyć koniec jednego wektora z początkiem drugiego i na odwrót. Punkt przecięcia odcinków AD i CB oznaczyć jako S. Wykazać, że $|AS| = |SD|$ i $|CS| = |SB|$ czyli, że punkt $S(2, 0)$ dzieli przekątne czworokata $ACDB$ na połowy.

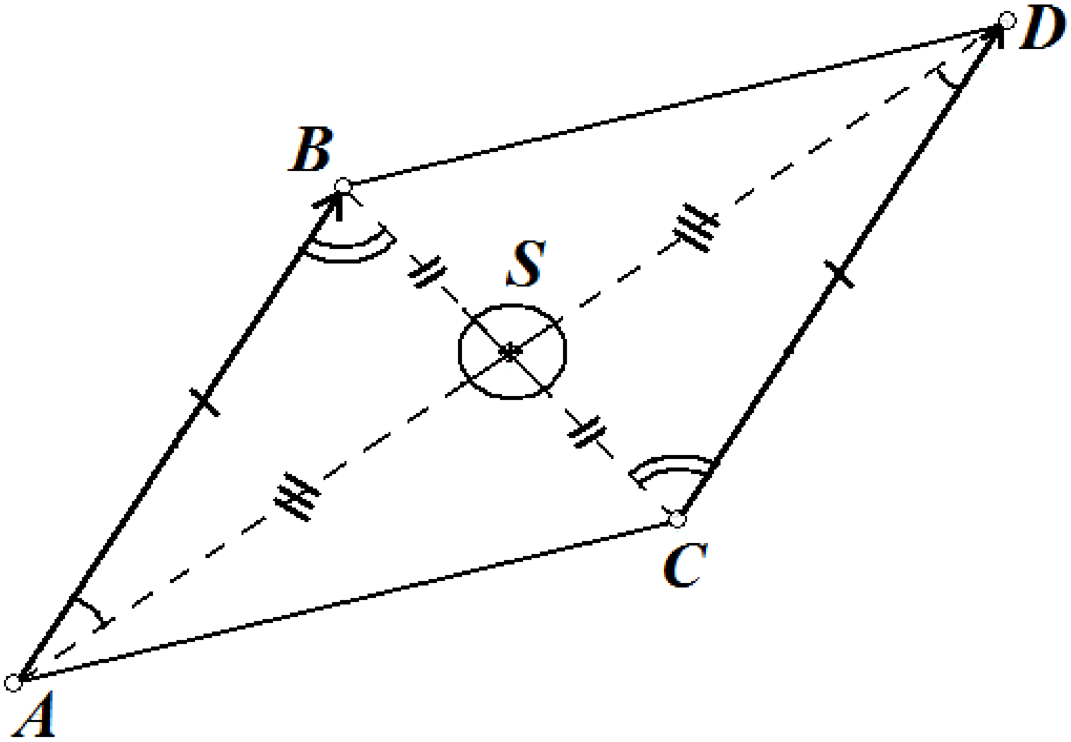
Rozwiązując zadanie znajdujemy najpierw równania prostych AD ($y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$) i BC ($y = -x + 2$) oraz, rozwiązując odpowiedni układ równań, punkt ich przecięcia $S(2, 0)$. Postępując jak w przykładzie 1.8 wykazujemy, że $|AS| = |SD|$ i $|CS| = |SB|$.

Opisaną konstrukcję wykorzystamy do zdefiniowania relacji $\sim$. Czytelnik mniej zaawansowany może przejść od razu do definicji uwagi 4.

Definicja 9. Niech $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ będą dowolnymi wektorami zaczepionymi (na płaszczyźnie). Mówimy, że wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są w relacji $\sim$, co zapisujemy $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, wtedy i tylko wtedy, gdy odcinki AD i CB przecinają się w punkcie S, który jest wspólnym środkiem tych odcinków.

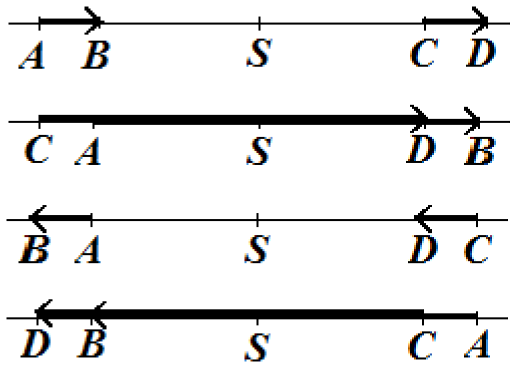
Lemat 2. *Wektory są w relacji $\sim$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełniają warunki: leżą na prostych równoległych, mają równe długości i zgodne zwroty.*

Dowód konieczności. Załóżmy, że wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$, są w relacji $\sim$. Rozpatrzmy przypadek, gdy oba te wektory nie leżą na jednej prostej.



Zgodnie z definicją relacji $\sim$, $|BS| = |SC|$ i $|AS| = |SD|$. Ponieważ kąty $\measuredangle BSA$ i $\measuredangle DSC$ są kątami wierzchołkowymi, więc mają jednakowe miary. Stąd wynika, że trójkąty $\triangle ASB$ i $\triangle CDS$ są przystające (na podstawie własności (k,b,k) przystawania trójkątów). Zatem $|AB| = |CD|$ i proste AB oraz CD są równoległe (na podstawie twierdzenia o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą). Wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ muszą mieć zgodne zwroty, bo wtedy odcinki łączące koniec jednego wektora z początkiem drugiego, i na odwrót, są przekątnymi czworokąta $ACDB$. Jeżeli miałyby zwroty przeciwne, to byłyby bokami czworokąta $ACDB$. W tym przypadku odcinki AD i BC nie przecinałyby się, nie istniałby punkt S z definicji relacji $\sim$.

Rozważmy przypadek, gdy oba te wektory leżą na jednej prostej i są w relacji $\sim$. Wówczas odcinki AD i BC mają wspólny środek, zatem jeden zawiera się w drugim. Możliwe są tylko uporządkowania przedstawione na poniższym rysunku, w których wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ mają zgodne zwroty. W pozostałych przypadkach (uporządkowania (D, A, C, B) i (C, B, D, A)) odcinki AD i BC mają różne środki.



Wiemy, że $|AS| = |SD|$ i $|BS| = |SC|$, stąd $|\overrightarrow{AS}| = |\overrightarrow{SD}|$ i $|\overrightarrow{BS}| = |\overrightarrow{SC}|$. Następnie zauważamy, że

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS}| = |\overrightarrow{AS}| = |\overrightarrow{SD}| = |\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CD}|,$$

skąd wynika, że $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Wykazaliśmy, że wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są równej długości, leżą na prostych równoległych i mają zgodne zwroty.

Dowód dostateczności będzie polegał na wykazaniu, że każde dwa wektory zaczepione leżące na prostych równoległych, o tej samej długości i zgodnych zwrotach, są związane ze sobą relacją $\sim$.

Niech $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ będą dowolnymi wektorami zaczepionymi leżącymi na różnych prostych równoległych, o tej samej długości i zgodnych zwrotach. Oznaczmy przez S punkt przecięcia przekątnych czworokąta $ACDB$. Na podstawie twierdzenia o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą stwierdzamy równość miar par kątów naprzemianległych $\measuredangle BAS = \measuredangle CDS$ i $\measuredangle ABS = \measuredangle DCS$. Ponieważ $|AB| = |CD|$, więc, trójkąty $\triangle ABS$ i $\triangle CDS$ są przystające (na podstawie własności (k,b,k) przystawania trójkątów). Stąd wynika, że $|BS| = |SC|$ i $|AS| = |SD|$, czyli $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, zgodnie z definicją relacji $\sim$.

Rozważmy przypadek, gdy wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ leżą na tej samej prostej oraz mają zgodne zwroty i tę samą długość. Niech S będzie środkiem odcinka CB. Z równości długości wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ wynika, że

$$|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SB}| = |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BD}|,$$

a stąd mamy, że $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$. Dalej wnioskujemy, że

$$|\overrightarrow{AS}| = |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CS}| = |\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{SD}|,$$

a stąd $|\overrightarrow{AS}| = |\overrightarrow{SD}|$, czyli S jest również środkiem odcinka AD. □

Twierdzenie 1. *Relacja $\sim$ jest relacją równoważności w zbiorze wektorów zaczepionych.*

Dowód: Zgodnie z definicją relacji równoważności, należy pokazać, że relacja $\sim$ jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

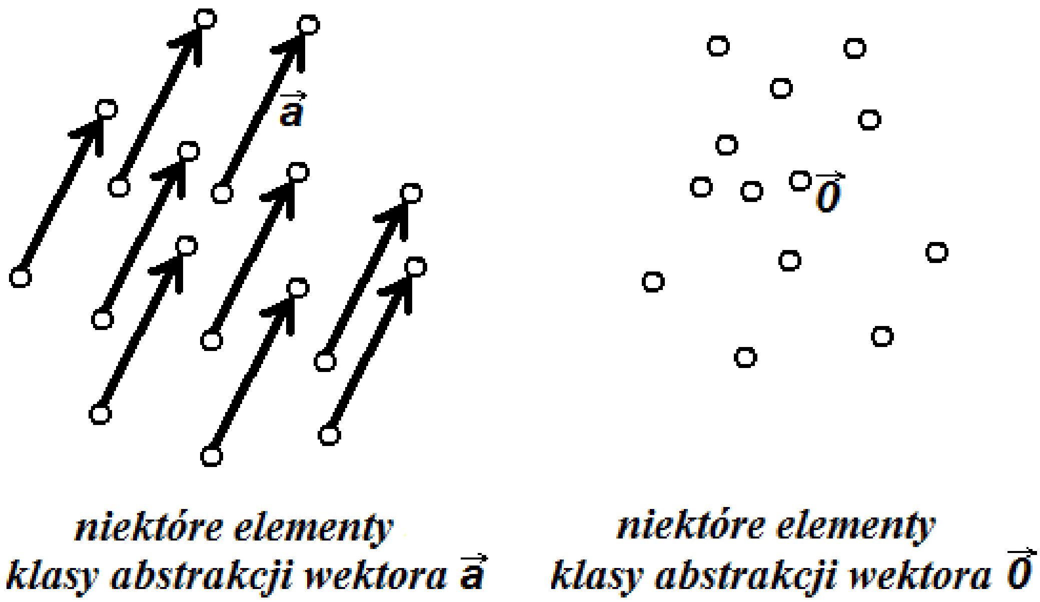
Relacja jest zwrotna, jeśli każdy element jest w relacji z samym sobą. Wobec tego, niech $\overrightarrow{AB}$ będzie dowolnym elementem zbioru wektorów zaczepionych. Wektor $\overrightarrow{AB}$ jest w relacji z samym sobą, co wynika z powyższego lematu, bo oba (równe) wektory leżą na tej samej prostej, maję tę samą długość i zgodne zwroty. Ponieważ wektor $\overrightarrow{AB}$ był dowolnie wybrany ze zbioru wektorów zaczepionych, udowodniliśmy, że każdy wektor zaczepiony jest w relacji $\sim$ z samym sobą.

Teraz wykażemy symetryczność relacji. Zakładamy, że dowolnie wybrany wektor zaczepiony $\overrightarrow{AB}$ jest w relacji z wektorem zaczepionym $\overrightarrow{CD}$. Załóżmy, że te wektory leżą na różnych prostych równoległych. Z dowodu lematu 2 wynika, że istnieje punkt S - środek równoległoboku $ACDB$ - dzielący jego przekątne na połowy. Jest on jednocześnie środkiem równoległoboku $CDBA$. Stąd wynika, że $\overrightarrow{CD}$ jest w relacji $\sim$ z $\overrightarrow{AB}$. Z dowolności wyboru wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ wynika symetryczność relacji.

W celu zbadania przechodniości załóżmy, że mamy trzy dowolne wektory zaczepione $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{EF}$ takie, że $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$. Te trzy wektory, zgodnie z lematem 2, leżą na prostych równoległych oraz mają jednakową długość i zgodne zwroty, więc dowolnie wybrana spośród nich para wektorów jest ze sobą w relacji $\sim$. Wobec dowolności wyboru wektorów zaczepionych będących w relacji $\sim$, rozpatrywana własność jest prawdziwa, co kończy dowód twierdzenia. $\square$

Relacja równoważności $\sim$ dzieli zbiór wszystkich wektorów zaczepionych na płaszczyźnie na rozłączne, niepuste podzbiory, zwane klasami abstrakcji (równoważności) relacji $\sim$, których suma jest równa całemu zbiorowi. Klasę abstrakcji wyznaczoną przez wektor $\overrightarrow{a}$ oznaczamy przez $[\overrightarrow{a}]$ i określamy następująco:$[\overrightarrow{a}] = \{\overrightarrow{b} : \overrightarrow{a} \sim \overrightarrow{b}\}$. Wektor $\overrightarrow{a}$ nazywamy reprezentantem tej klasy.

Definicja 10. Klasy abstrakcji relacji $\sim$ nazywamy wektorami swobodnymi lub krótko, wektorami.



Uwaga 4. Do klasy abstrakcji danego wektora $\overrightarrow{AB}$ będziemy zaliczać wszystkie wektory leżące na prostych równoległych do prostej AB, o tej samej długości co $\overrightarrow{AB}$ i zwrocie zgodnym ze zwrotem wektora $\overrightarrow{AB}$.

W definicji 1 wektor zaczepiony jest identyfikowany jednoznacznie przez jego początek i koniec. Natomiast wektor swobodny może być jednoznacznie określony za pomocą tzw. współrzędnych wektora, zapisywanych w nawiasach kwadratowych. Załóżmy, że punkt płaszczyzny A ma współrzędne (x_A, y_A), a punkt B ma współrzędne (x_B, y_B). Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ są wtedy określone wzorem

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A].$$

Podobnie w przestrzeni trójwymiarowej, jeśli punkt A ma współrzędne (x_A, y_A, z_A), a punkt B ma współrzędne (x_B, y_B, z_B), to współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ określone są wzorem

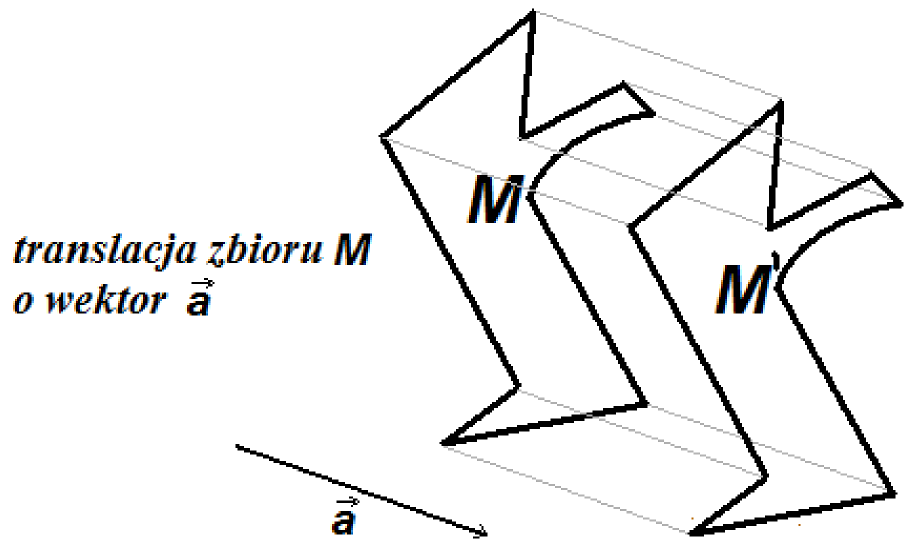
$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A].$$

Dla uproszczenia oznaczeń każdy wektor położony na prostej równoległej do tej, na której leży wektor $\overrightarrow{AB}$, mający tę samą długość i zwrot co wektor $\overrightarrow{AB}$, (inaczej: będący w relacji $\sim$ z wektorem zaczepionym $\overrightarrow{AB}$), oznaczamy przez $\overrightarrow{a}$.

Przykład 4. Na płaszczyźnie znaleźć obraz C' punktu $C(x_0, y_0)$ po przesunięciu go o wektor $\overrightarrow{a}$ o współrzędnych $[p, q]$.

W rozwiązaniu można wykorzystać operację dodawania wektorów zaczepionych (patrz przykład 2). Punkt C będzie reprezentować wektor zerowy w nim zaczepiony. Dodajmy do niego wektor $\overrightarrow{a}$ zaczepiony w punkcie C. Suma wektorów ma koniec w punkcie o współrzędnych (x_0+p, y_0+q). Stąd obrazem punktu C w przesunięciu o wektor $\overrightarrow{a}$ będzie punkt $C' = (x_0+p, y_0+q)$.

Uwaga 5. Przekształcenie określone w treści zadania nosi nazwę translacji lub przesunięcia o wektor $\overrightarrow{a}$. Translację można wykonać na dowolnym zbiorze M punktów płaszczyzny. Obraz M' będzie składał się z obrazów punktów zbioru M przekształconych przez translację o ten sam wektor. Warto przypomnieć, że translacja jest izometrią, czyli zachowuje odległość punktów.



W wielu zagadnieniach (np. przy dodawaniu lub odejmowaniu wektorów) łatwiej jest posługiwać się wektorami swobodnymi, niż zaczepionymi.

Definicja 11. Wektory swobodne są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe odpowiednie współrzędne, tzn.

(a) na płaszczyźnie

$$(\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}) \Leftrightarrow (a_x = b_x \wedge a_y = b_y),$$

gdzie $\overrightarrow{a} = [a_x, a_y]$ i $\overrightarrow{b} = [b_x, b_y]$,

(b) w przestrzeni

$$(\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}) \Leftrightarrow (a_x = b_x \wedge a_y = b_y \wedge a_z = b_z),$$

gdzie $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ i $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$.

Przykład 5. Wyznaczyć wszystkie elementy klasy abstrakcji wektora zaczepionego
(a) o początku w punkcie $A(1, 2)$ i końcu w punkcie $B(3, 1)$,
(b) o początku i końcu w punkcie $C(3, 5)$.

Rozpatrzmy przypadek (a). Wektor $\overrightarrow{AB}$ ma współrzędne $[3 - 1, 1 - 2] = [2, -1]$. Możemy go identyfikować z wektorem swobodnym $\overrightarrow{a}$. Wybierzmy dowolny punkt płaszczyzny, np. $M(2, -2)$. Sprawdźmy, czy istnieje wektor o początku w tym punkcie, będący w tej samej klasie abstrakcji, co wektor $\overrightarrow{AB}$. Miałby on koniec w punkcie $N(x_N, y_N)$ i te same współrzędne co $\overrightarrow{AB}$, czyli $[x_N - 2, y_N - (-2)] = [2, -1]$. Zatem jego koniec znajdowałby się w punkcie N o współrzędnych $(4, -3)$. W analogiczny sposób można znaleźć wektor $\overrightarrow{a}$ z klasy abstrakcji wektora $\overrightarrow{AB}$, zaczepiony w dowolnym punkcie płaszczyzny (x_0, y_0). Jego koniec będzie w punkcie $(x_0 + 2, y_0 + (-1))$. W klasie abstrakcji wektora $\overrightarrow{AB}$ znajdzie się nieprzeliczalnie wiele wektorów o współrzędnych $[2, -1]$, bo tyle jest możliwych punktów zaczepienia.
W rozwiązaniu części (b) możemy postąpić tak samo. W klasie abstrakcji zaczepionego wektora zerowego $\overrightarrow{CC}$ znajdzie się każdy wektor o początku w punkcie o współrzędnych (x_0, y_0) i końcu w $(x_0 + (3 - 3), y_0 + (5 - 5))$, czyli wektor zerowy zaczepiony w (x_0, y_0). Wszystkie te zaczepione wektory są reprezentowane przez jeden swobodny wektor zerowy. Ponieważ taki wektor jest tylko jeden, więc oznaczamy go symbolem $\overrightarrow{0}$. Wnioski z tego rozumowania można sformułować w postaci lematu.

Lemat 3. *Istnieje tylko jeden wektor swobodny zerowy $\overrightarrow{0}$, którego wszystkie współrzędne są równe zeru. Reprezentuje on nieprzeliczalną klasę wektorów zaczepionych, które mają koniec i początek w tym samym punkcie.*

Definicja 12. Długością wektora swobodnego jest długość dowolnego reprezentanta klasy równoważności.

Lemat 4. *Długość $|\overrightarrow{a}|$ wektora swobodnego $\overrightarrow{a}$ jest pierwiastkiem kwadratowym z sumy kwadratów jego współrzędnych.*

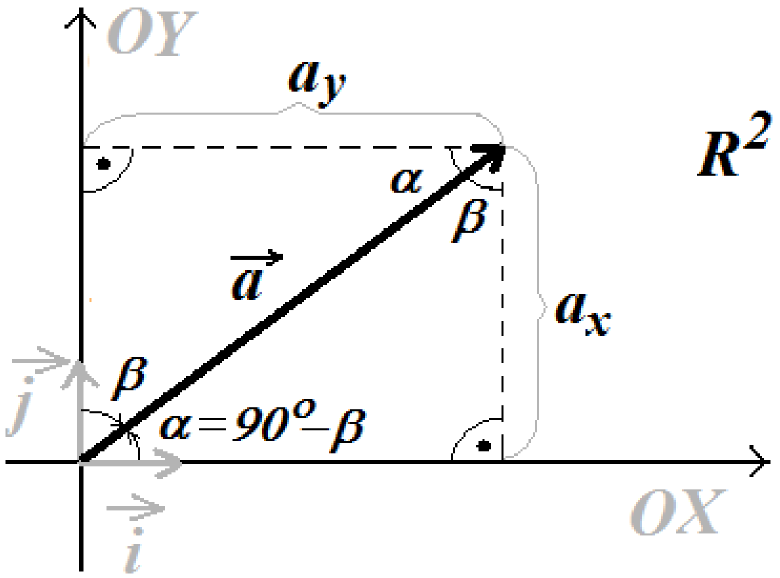
Lemat 5. *Leżący na płaszczyźnie wektor przeciwny do wektora $\overrightarrow{a}$ o współrzędnych $[a_x, a_y]$ ma współrzędne $[-a_x, -a_y]$, oraz taką samą długość co $\overrightarrow{a}$. Leżący w przestrzeni wektor przeciwny do wektora $\overrightarrow{a}$ o współrzędnych $[a_x, a_y, a_z]$ ma współrzędne $[-a_x, -a_y, -a_z]$ oraz taką samą długość co $\overrightarrow{a}$. Każdy wektor niezerowy i wektor do niego przeciwny mają przeciwne zwroty.*

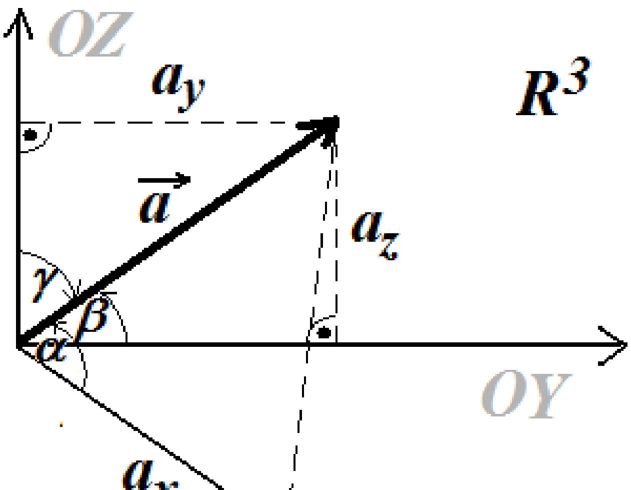
Definicja 13. Kosinusami kierunkowymi niezerowego wektora $\overrightarrow{a}$ nazywamy kosinusy kątów skierowanych pomiędzy wersorami osi a wektorem $\overrightarrow{a}$, przy czym:
(a) jeśli $\overrightarrow{a}$ jest wektorem na płaszczyźnie, o współrzędnych $[a_x, a_y]$, to

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overrightarrow{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\overrightarrow{a}|}, \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1,$$

(b) jeśli $\overrightarrow{a}$ jest wektorem w przestrzeni, o współrzędnych $[a_x, a_y, a_z]$, to

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overrightarrow{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\overrightarrow{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overrightarrow{a}|}, \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$





Uwaga 6. Współrzędne a_x, a_y, a_z wektora $\overrightarrow{a}$ można interpretować jako stałe wyrażające iloraz długości rzutu wektora $\overrightarrow{a}$ na odpowiednie osie układu współrzędnych i długości wersora odpowiedniej osi.

Przykład 6. W przestrzeni dane są punkty $A(-1, 0, 3)$ i $B(-2, 5, 0)$. Wyznaczyć rzuty wektora $\overrightarrow{AB}$ na osie układu współrzędnych oraz kosinusy kierunkowe.

Wektor $\overrightarrow{AB}$ ma współrzędne $[-1, 5, -3]$. Rzuty na osie OX, OY i OZ (lub inaczej: składowe) tego wektora są równe $-\overrightarrow{i}$, $5\overrightarrow{j}$ i $-3\overrightarrow{k}$, gdzie $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ i $\overrightarrow{k}$ są wersorami leżącymi na tych osiach. Wektor $\overrightarrow{AB}$ można zapisać następująco:

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$$

i przedstawienie to jest jednoznaczne. Kosinusy kierunkowe są równe

$$\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{35}}, \cos\beta = \frac{5}{\sqrt{35}}, \cos\gamma = \frac{-3}{\sqrt{35}}.$$

Od tego momentu będziemy zapisywać wektory jako obiekty przestrzeni trójwymiarowej, o trzech współrzędnych. Analogiczne twierdzenia dla wektorów na płaszczyźnie otrzymamy po pominięciu ostatniej współrzędnej. Przyjmijmy, że wektory w przestrzeni mają następujące współrzędne: $\overrightarrow{a} = [a_x, a_y, a_z]$, $\overrightarrow{b} = [b_x, b_y, b_z]$ oraz $\overrightarrow{c} = [c_x, c_y, c_z]$.

Na wektorach swobodych można określić następujące działania: dodawanie, odejmowanie, mnożenie przez skalar oraz iloczyn skalarny. Wszystkie te działania są wykonalne na wszystkich elementach zbioru wektorów swobodnych.

Definicja 14. Sumą wektorów $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ nazywamy wektor $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ o współrzędnych $[a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z]$.

Definicja 15. Różnicą wektorów $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ nazywamy wektor $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ o współrzędnych $[a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z]$.

Również w przypadku wektorów swobodnych, odejmowanie to dodawanie wektora przeciwnego.

Definicja 16. Iloczynem wektora swobodnego $\overrightarrow{a}$ przez skalar k nazywamy wektor $k\overrightarrow{a}$ o współrzędnych $[ka_x, ka_y, ka_z]$.

Uwaga 7. Wektor $k\overrightarrow{a}$ ma ten sam zwrot co $\overrightarrow{a}$, jeśli k jest dodatnim skalarem, zwrot przeciwny do wektora $\overrightarrow{a}$, jeśli k jest ujemne. Jednak, bez względu na znak skalaru k, $|k\overrightarrow{a}| = |k||\overrightarrow{a}|$.

Operacja mnożenia wektorów przez skalar może posłużyć do zdefiniowania wektorów równoległych.

Definicja 17. Niezerowe wektory $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki skalar k, że $\overrightarrow{b} = k\overrightarrow{a}$.

Jeśli $k = 0$ i $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$, to z powyższej definicji wynika, że wektor zerowy jest równoległy do każdego wektora.

Twierdzenie 2. *Niezerowe wektory $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy ich odpowiednie współrzędne są proporcjonalne, tj.*

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

Działania algebraiczne na wektorach mają analogiczne własności jak dodawanie, odejmowanie i mnożenie liczb rzeczywistych.

Twierdzenie 3. *Dla dowolnych wektorów $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ oraz dowolnych liczb rzeczywistych k i l zachodzą następujące warunki:*

(a) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$ *(przemienność dodawania),*

(b) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$ *(łączność dodawania),*

(c) $\overrightarrow{0} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$ *(element neutralny dodawania),*

(d) istnieje wektor $\overrightarrow{-a}$*, zwany wektorem przeciwnym do wektora* $\overrightarrow{a}$ *taki, że* $\overrightarrow{-a} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{-a}) = \overrightarrow{0}$ *(element przeciwny dodawania),*

(e) $k(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = k\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b}$ *(rozdzielność mnożenia przez skalar względem dodawania),*

(f) $k(l\overrightarrow{a}) = (kl)\overrightarrow{a} = (lk)\overrightarrow{a} = l(k\overrightarrow{a})$ *(łączność mnożenia przez skalar),*

(g) $1\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}1 = \overrightarrow{a}$ *(element neutralny mnożenia przez skalar),*

(h) $0\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ *(element zerowy mnożenia przez skalar),*

(i) $k(\overrightarrow{a}) = (\overrightarrow{a})k$ *(przemienność mnożenia przez skalar),*

(j) $(-1)\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a}$,

(k) $k\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

Uwaga 8. Struktura złożona ze zbioru wektorów z dodawaniem oraz mnożeniem przez skalar spełniającymi warunki (*a*) – (*h*) jest przestrzenią liniową (przestrzenią wektorową).

Ciekawą operacją na wektorach swobodnych jest tzw. iloczyn skalarny. Nazwa działania bierze się stąd, że jego wynik jest skalarem a nie wektorem, jak w przypadku innych działań.

Definicja 18. Iloczyn skalarny $\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}$ wektorów $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ definiujemy w sposób następujący:

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = \begin{cases} |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos(\measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})) & \text{jeśli } |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| > 0 \\ 0 & \text{jeśli } |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| = 0 \end{cases}$$

Twierdzenie 4. *Iloczyn skalarny wektorów ma następujące własności:*

(a) $\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \circ \overrightarrow{a}$ *(przemienność),*

(b) $k(\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}) = (k\overrightarrow{a}) \circ \overrightarrow{b}$ *dla dowolnego skalaru k (łączność względem czynnika liczbowego),*

(c) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \circ \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \circ \overrightarrow{c}$ *(rozdzielność względem dodawania),*

(d) $\overrightarrow{a}^2 = \overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|^2$,

(e) $\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Uwaga 9. Iloczyn skalarny nie ma własności zwykłej łączności, bo dla dowolnych wektorów $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$

$$(\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}) \circ \overrightarrow{c} \neq \overrightarrow{a} \circ (\overrightarrow{b} \circ \overrightarrow{c}).$$

Za pomocą iloczynu skalarnego można zdefiniować pojęcie ortogonalności (prostopadłości) wektorów.

Definicja 19. Wektory $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ są ortogonalne (co zapisujemy jako $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$) wtedy i tylko wtedy, gdy $\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = 0$.

Wynika stąd, że wektor zerowy jest ortogonalny do każdego wektora. Ten fakt powoduje, że zerowa wartość iloczynu skalarnego wektorów nie oznacza, że kąt ostry pomiędzy nimi ma miarę 90°.

Twierdzenie 5. *Dla dowolnych wektorów* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$

$$(\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = 0) \Leftrightarrow (\overrightarrow{a} = 0 \lor \overrightarrow{b} = 0 \lor \overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}).$$

....

Wektory pełnią ważną rolę w wielu dziedzinach matematyki. Zadając pytanie, czym właściwie jest wektor, możemy spodziewać się różnych odpowiedzi.

Wektor może być utożsamiany z
— kierunkiem na płaszczyźnie lub w przestrzeni (w geometrii),
— uporządkowaną parą punktów (w geometrii analitycznej),
— punktem będącym jego końcem, jeśli jego początek jest w początku układu współrzędnych (w analizie funkcjonalnej),
— elementem struktury zwanej przestrzenią liniową (w algebrze liniowej),
— macierzą liczbową posiadającą tylko jedną kolumnę (w algebrze macierzy),
— gradientem pola (w teorii potencjału),
— graficzną reprezentacją wyniku pomiaru wartości pewnych cech badanego obiektu (w statystyce),
— portfelem walorów lub strategią inwestycyjną (w matematyce finansowej).
Wszystkie te zastosowania świadczą o ważności pojęcia wektora w matematyce.

....

Zadania obowiązkowe

Zadanie 1. Po przesunięciu o wektor $[1,2,3]$ trójkąt ABC został przekształcony na trójkąt $A'B'C'$ o wierzchołkach $A'(2,2,6)$, $B'(0,4,4)$ i $C'(1,4,5)$. Jakie wierzchołki miał trójkąt przed przesunięciem ?

Uwagi metodologiczne. Wystarczy przesunąć wierzchołki trójkąta $A'B'C'$ obrazu trójkąta ABC o wektor przeciwny do wektora przesunięcia. Warto przypomnieć, że przekształcenie odwrotne do translacji jest też translacją.
Odpowiedź: $A(1,0,3)$, $B(-1,2,1)$, $C(0,2,2)$.

Zadanie 2. Czy czworokąt o wierzchołkach $A(-3,5,6)$, $B(1,-5,7)$, $C(8,-3,-1)$ i $D(4,7,-2)$ jest kwadratem?

Szkic rozwiązania. Należy sprawdzić, czy $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ i $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = 0$, lub wybrać inny równoważny zestaw warunków.
Odpowiedź: Tak.

Zadanie 3. Dany jest wektor swobodny $\overrightarrow{u}$ należący do klasy abstracji wektora zaczepionego $\overrightarrow{MN}$ o początku w punkcie $M(1,-1)$ i końcu w punkcie $N(-1,1)$. Wyznaczyć współrzędne wektora $\overrightarrow{w}$, jeżeli
(a) $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{u}$,
(b) $\overrightarrow{w} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{u}$,
(c) $\overrightarrow{w}$ jest równoległy do $\overrightarrow{u}$ i ma ten sam zwrot, co $\overrightarrow{u}$, ale jego długość stanowi 125 procent długości wektora $\overrightarrow{u}$.

Szkic rozwiązania. Wektor $\overrightarrow{u}$ ma współrzędne $[-2,2]$. Korzystamy z definicji 16 dla $k = 2$ w podpunkcie a), dla $k = -\frac{1}{2}$ w podpunkcie b) i dla $k = 5/4$ w podpunkcie c). Dostajemy w a) [-4,4], w b) [1,-1] oraz w c) [-5/2,5/2].

Uwagi metodologiczne. Skorzystać z definicji 16.
Odpowiedź: a) [-4,4], b) [1,-1] c) [-5/2,5/2].

Zadanie 4. Udowodnić, że punkty $A(-2,1)$, $B(3,4)$, $C(-5,6)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego. Znaleźć pozostałe kąty tego trójkąta.

Szkic rozwiązania. Obliczmy współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB} = [5,3]$, $\overrightarrow{BC} = [-8,2]$, $\overrightarrow{AC} = [-3,5]$ a następnie iloczyny skalarne. Ponieważ $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = 5 \cdot (-3) + 3 \cdot 5 = 0$, więc kąt przy wierzchołku A jest kątem prostym. Aby znaleźć kąt przy wierzchołku B, obliczamy iloczyn skalarny $\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = (-5) \cdot (-8) + (-3) \cdot 2 = 34$. Ponieważ $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{34}$ i $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{68} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{34}$, więc $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, stąd $\beta = 45^0$. Kąt przy wierzchołku C też musi mieć miarę 45^0.

Uwagi metodologiczne. Trzeba skorzystać z twierdzenia Pitagorasa i definicji iloczynu skalarnego.
Odpowiedź: Trójkąt jest prostokątny i równoramienny.

Zadanie 5. Wektory: $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ tworzą trójkąt. Wykazać, że ze środkowych trójkąta (traktowanych jako wektory wychodzące z wierzchołków) można zbudować trójkąt.

Szkic rozwiązania. Niech d_1 będzie środkową opuszczoną na bok a, d_2- na bok b, d_3- na c. Wyraźmy najpierw środkowe za pomocą wektorów tworzących trójkąt $\overrightarrow{d_1} = \overrightarrow{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{d_2} = \overrightarrow{c} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{d_3} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{c}$. Dodajmy stronami te równości otrzymując $\overrightarrow{d_1} + \overrightarrow{d_2} + \overrightarrow{d_3} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$, co oznacza, że środkowe utworzą trójkąt.

Zadanie 6. Na płaszczyźnie dane są punkty $A(0,2)$, $B(-2,3)$, $C(1,-1)$, $D(3,-2)$, $E(3,2)$, $F(2,\frac{5}{2})$, $G(1,1)$ oraz $H(1,1)$. Czy wśród wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ i $\overrightarrow{GH}$ znajdują się dwa równoległe i o tej samej długości i zgodnych zwrotach? (wersja trudniejsza: Czy wśród wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ i $\overrightarrow{GH}$ znajdują się dwa należące do tej samej klasy abstrakcji względem relacji $\sim$?)

Uwagi metodologiczne. Pierwszy sposób rozwiązania (wersji łatwiejszej) polega na wyznaczeniu współrzędnych tych wektorów i ich porównanie. Warto wskazać parę wzajemnie przeciwnych wektorów. Należy ocenić, które z par wektorów leżą na prostych równoległych, które są prostopadłe do siebie. Trzeba też porównać ich długości. Korzystamy z lematu 3, lematu 4, lematu 5, definicji 17, twierdzenia 2, definicji 18, definicji 19 lub twierdzenia 4 e) oraz lematu 4, 5 i 8. W drugim sposobie rozwiązania (wersji trudniejszej) korzystamy z definicji 9 (lub lematu 2) i uwagi 4.

Szkic rozwiązania. W wersji łatwiejszej najpierw znajdujemy współrzędne wektorów zaczepionych $\overrightarrow{AB} = [-2,1]$, $\overrightarrow{CD} = [2,-1]$, $\overrightarrow{EF} = [-1,\frac{1}{2}]$ i $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{0}$. Wszystkie te wektory leżą na prostych równoległych, ale $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ mają przeciwne zwroty, $\overrightarrow{EF}$ jest o połowę krótszy niż $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$.

Inny sposób rozwiązania (wersji trudniejszej) bazuje na definicji relacji $\sim$. Wektory $\overrightarrow{CB}$ i $\overrightarrow{AD}$ nie przecinają się, więc $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ należą do różnych klas abstrakcji. Sprawdźmy teraz parę $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{EF}$. Mamy: $\frac{1}{2}\overrightarrow{AF} = [1,\frac{1}{4}]$, więc środek odcinka AF ma współrzędne $(1,\frac{9}{4})$, natomiast $\frac{1}{2}\overrightarrow{EB} = [-\frac{5}{2},\frac{1}{2}]$, i środek odcinka EB ma współrzędne $(\frac{1}{2},\frac{5}{2})$. Środki odcinków AF i EB są różnymi punktami, więc wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{EF}$ należą do różnych klas abstrakcji. Podobnie, środek odcinka CF leży w punkcie $(\frac{3}{2},\frac{3}{4})$ a środek DE leży w punkcie $(3,0)$. Pozostała do rozpatrzenia para wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{GH}$. Punkt wspólny odcinków AH i GB jest punktem G (albo H), czyli końcem, a nie środkiem odcinka AH. Analogicznie wykazujemy, że zerowy wektor nie jest w relacji $\sim$ z żadnym z pozostałych wektorów.
Odpowiedź: Nie.

Zadania dodatkowe

Zadanie 7. Na płaszczyźnie dany jest zbiór punktów $M = \{(x, y) : x \in [1, 4], y = |x - 2|\}$. Znaleźć obraz tego zbioru po przesunięciu o wektor $[-1, 1]$. Sporządzić rysunek.

Szkic rozwiązania. Każdy punkt zbioru M o współrzędnych $(x, |x - 2|)$, gdzie $x \in [1, 4]$, trzeba przesunąć o podany wektor do położenia $(x - 1, |x - 2| + 1)$.

Uwagi metodologiczne. Warto sporzadzić rysunek. Można przeprowadzić dyskusję nad przypadkiem, gdy zbiór M jest innym obiektem przestrzeni dwu- lub trójwymiarowej.
Odpowiedź: $M' = \{(x, y) : x \in [0, 3], y = |x - 1| + 1\}$.

Zadanie 8. Udowodnić, że dowolny wektor $\overrightarrow{AB}$ w przestrzeni można jednoznacznie zapisać w postaci kombinacji liniowej wersorów $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$.

Szkic rozwiązania. Oznaczmy współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ przez $[a_x, a_y, a_z]$. Wtedy możemy zapisać $[a_x, a_y, a_z] = a_x \cdot [1, 0, 0] + a_y \cdot [0, 1, 0] + a_z \cdot [0, 0, 1]$, czyli $\overrightarrow{AB} = a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}$. Przedstawienie to jest jednoznaczne co można wykazać zapisując i rozwiązując odpowiedni układ równań liniowych.

Zadanie 9. Znając środki boków trójkąta: $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$, $(4, 0)$ i $(\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$, znaleźć jego wierzchołki.

Szkic rozwiązania. Oznaczmy środki boków trójkąta jako $S_1(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$, $S_2(4, 0)$ i $S_3(\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$. Należy znaleźć obraz punktu S_3 po przesunięciu o wektor $\overrightarrow{S_1S_2}$ otrzymującc punkt A, obraz punktu S_2 po przesunięciu o wektor $\overrightarrow{S_3S_1}$ otrzymując punkt C i obraz punktu S_1 po przesunięciu o wektor $\overrightarrow{S_2S_3}$ otrzymując punkt B. Punkty A, B i C są wierzchołkami szukanego trójkąta.

Uwagi metodologiczne. Można to zadanie rozwiązać inaczej, korzystając z twierdzenia o odcinku łączącym środki dwóch boków trójkąta lub za pomocą metod geometrii analitycznej.
Odpowiedź: $A(5, -1)$,$B(2, 4)$ i $C(9, 1)$.

Zadanie 10. Wykazać, że wektory $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a}(\overrightarrow{b} \circ \overrightarrow{c}) - \overrightarrow{b}(\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{c})$ i $\overrightarrow{c}$ są prostopadłe.
Szkic rozwiązania. Obliczamy wartość odpowiedniego iloczynu skalarnego

$$\overrightarrow{c} \circ \overrightarrow{p} = (\overrightarrow{c} \circ \overrightarrow{a})(\overrightarrow{b} \circ \overrightarrow{c}) - (\overrightarrow{c} \circ \overrightarrow{b})(\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{c}) = 0.$$

Zadania domowe

Zadanie 11. Na płaszczyźnie dane są punkty: $A(3, -2)$, $B(1, 4)$, $C(2, -5)$ i $D(6, 2)$. Znaleźć współrzędne punktu $S(x, y)$, spełniającego warunek $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{0}$, (Znak "+" oznacza dodawanie wektorów swobodnych).
Odpowiedź: $S(3, -\frac{1}{4})$.

Zadanie 12. Obliczyć $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})^2$ wiedząc, że kąt między wektorami $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ wynosi 150^0 oraz $|\overrightarrow{a}| = 2\sqrt{3}$ i $|\overrightarrow{b}| = 2$.
Odpowiedź: 4.

Zadanie 13. Znaleźć wartość iloczynu skalarnego wektorów $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$, jeżeli $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$ i $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j}$.
Odpowiedź: 13.

Zadanie 14. Wektor $\overrightarrow{OA}$ ma długość $2\sqrt{3}$ i kosinusy kierunkowe równe. Znaleźć współrzędne punktu A, jeżeli punkt O jest poczatkiem układu współrzędnych $OXYZ$.
Odpowiedź: $(2, 2, 2)$ lub $(-2, -2, -2)$.

Zadanie 15. Obliczyć długości przekątnych równoległoboku $ABCD$ zbudowanego na wektorach $\overrightarrow{AB} = [1, 2, 3]$ i $\overrightarrow{AD} = [0, 1, -2]$. Dla uproszczenia rachunków można przyjąć, że punkt A jest początkiem układu współrzędnych.
Odpowiedź: $\sqrt{27}$ i $\sqrt{11}$.

Literatura

B. Gdowski, E. Pluciński, *Zbiór zadań z matematyki dla kandydatów na wyższe uczelnie,* WNT Warszawa, 1973.

W. Leksiński, B. Macukow, W. Żakowski, *Matematyka w zadaniach,* WNT, Warszawa 1985.

B. Miś, *Tajemnicza liczba e i inne sekrety matematyki,* WNT, Warszawa 1989.