Jednokładność i podobieństwo

Adrian Łydka
Bernadeta Tomasz

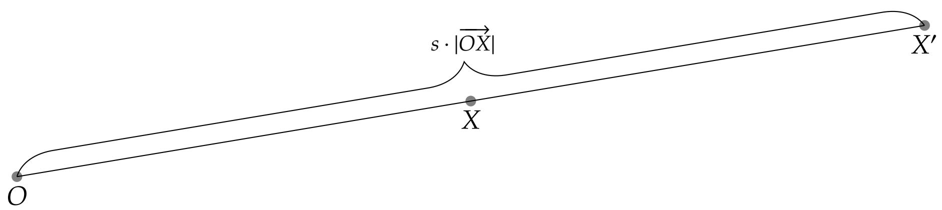
Teoria

Definicja 1. Iloczynem niezerowego wektora $\vec{u}$ przez liczbę rzeczywistą $s \neq 0$ nazywamy wektor $\vec{v}$ spełniający następujące dwa warunki:
1) $|\vec{v}| = |s| \cdot |\vec{u}|$,
2) zwroty $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są zgodne wtedy i tylko wtedy, gdy $s > 0$; zwroty $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są przeciwne wtedy i tylko wtedy, gdy $s < 0$.
Jeżeli $\vec{u} = \vec{0}$ lub $s = 0$, to $s \cdot \vec{u} = \vec{0}$.

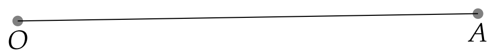
Definicja 2. Jednokładnością (homotetią) o środku O i skali $s \neq 0$ nazywamy przekształcenie płaszczyzny, które każdemu punktowi X płaszczyzny przyporządkowuje punkt X' taki, że

$$\overrightarrow{OX'} = s \cdot \overrightarrow{OX}.$$

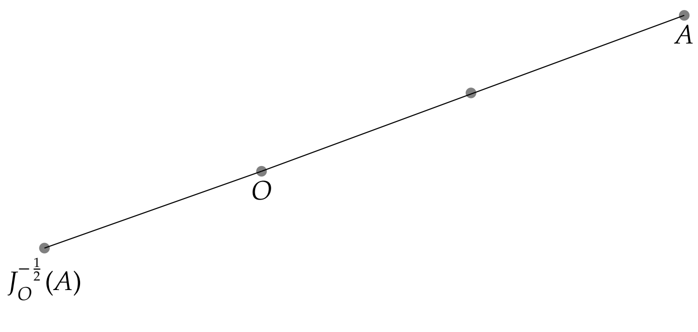
Jednokładność o środku O i skali s oznaczamy J_O^s.



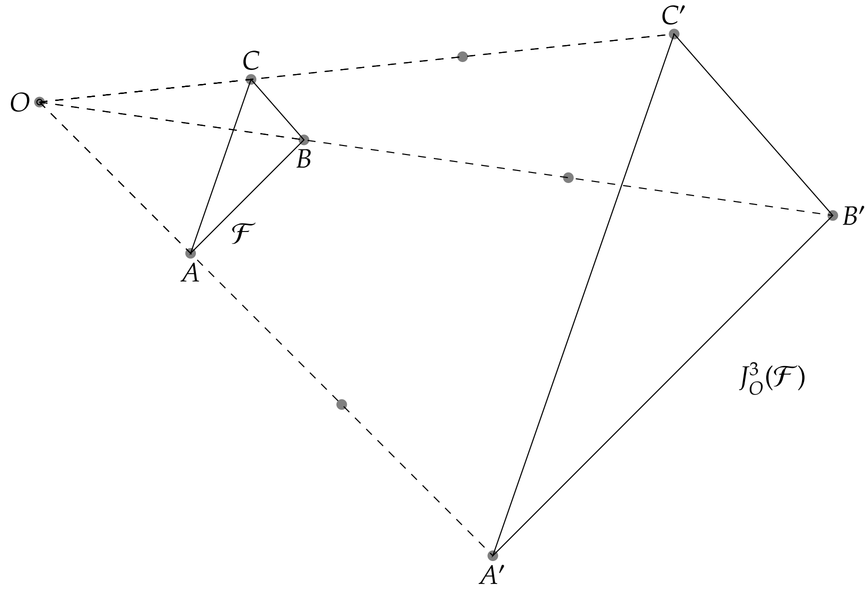
Przykład 1. Dane są punkty O i A. Znajdziemy punkt $A' = J_O^{-\frac{1}{2}}(A)$. Narysujmy najpierw odcinek OA



Skala jednokładności jest ujemna, zatem jej środek O jest między punktami A i A'. Ponadto $|OA'| = \frac{1}{2}|OA|$, bo $s = -\frac{1}{2}$.



Definicja 3. Figury $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ nazywamy **jednokładnymi**, jeżeli jedną z nich można przekształcić przez jednokładność na drugą (wówczas oczywiście także drugą figurę można przekształcić na pierwszą przez jednokładność). Środek tej jednokładności nazywamy środkiem jednokładności figur $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$. Jeżeli $J_O^s(\mathcal{F}_1) = \mathcal{F}_2$, to mówimy, że $\mathcal{F}_2$ jest jednokładna do $\mathcal{F}_1$ w skali s.



Rysunek 1.

Przykład 2. Na powyższym rysunku mamy przykład przekształcenia trójkąta w jednokładności o skali $s = 3$ i środku O.

Twierdzenie 1. *W jednokładności J_O^s:*
a) obrazem odcinka AB jest taki odcinek $A'B'$, dla którego $|A'B'| = |s| \cdot |AB|$,
b) obrazem prostej jest prosta do niej równoległa, w szczególności obrazem wektora jest wektor do niego równoległy,
c) obrazem kąta jest kąt do niego przystający.

Twierdzenie 2.

a) $J_O^{s_1} \circ J_O^{s_2} = J_O^{s_1 s_2}$.
b) Przekształceniem odwrotnym do J_O^s jest $J_O^{\frac{1}{s}}$.

Niech $|\mathcal{F}|$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$. Poniższe twierdzenie orzeka jak zmienia się pole w jednokładności o skali s.

Twierdzenie 3. *Jeżeli $\mathcal{F}_2 = J_O^s(\mathcal{F}_1)$, to $|\mathcal{F}_2| = |s|^2 \cdot |\mathcal{F}_1|$.*

Definicja 4. Podobieństwem P **o skali** k $(k > 0)$ nazywamy takie przekształcenie płaszczyzny, które dowolnym dwóm punktom X i Y przyporządkowuje takie punkty $P(X) = X'$ i $P(Y) = Y'$, że

$$|X'Y'| = k|XY|.$$

Definicja 5. Figury $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ nazywamy **podobnymi**, jeżeli istnieje takie podobieństwo P, dla którego $P(\mathcal{F}_1) = \mathcal{F}_2$. Fakt ten zapisujemy $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2$.

Z powyższej definicji wnioskujemy, że wielokąty $A_1A_2\ldots A_n$ oraz $B_1B_2\ldots B_n$ są **podobne**, jeżeli ich kąty są odpowiednio równe, a boki proporcjonalne, tzn. gdy

$$\measuredangle A_1 = \measuredangle B_1, \quad \measuredangle A_2 = \measuredangle B_2, \ldots, \quad \measuredangle A_n = \measuredangle B_n \tag{1}$$

oraz

$$\frac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|} = \frac{|A_2A_3|}{|B_2B_3|} = \cdots = \frac{|A_nA_1|}{|B_nB_1|}. \tag{2}$$

W szczególności dwa trójkąty są podobne, jeżeli kąty jednego trójkąta są równe odpowiednim kątom drugiego trójkąta i ich odpowiednie boki są proporcjonalne.

W praktyce, przy badaniu podobieństwa trójkątów, stosuje się poniższe twierdzenie, które pozwala na podstawie mniejszej ilości informacji wnioskować o podobieństwie trójkątów.

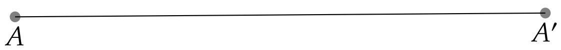
Twierdzenie 4.
I cecha podobieństwa trójkątów (bbb): *Dwa trójkąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego.*
II cecha podobieństwa trójkątów (bkb): *Dwa trójkąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta, a kąty zawarte między proporcjonalymi bokami mają równe miary.*
III cecha podobieństwa trójkątów (kk): *Dwa trójkąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy dwa kąty jednego z nich mają te same miary, co dwa kąty drugiego.*

Zadania obowiązkowe

Zadanie 1. Jakie przekształcenie płaszczyzny przedstawia J_O^1, a jakie przekształcenie płaszczyzny przedstawia J_O^{-1}?
Wskazówka: Jeśli $J_O^s(X) = X'$, to punkty O, X i X' są współliniowe, tzn. należą do tej samej prostej. Prześledzić wzajemne położenie punktów X, O i X' oraz odległości punktów X i X' od punktu O.
Odpowiedź: Identyczność. Symetria środkowa względem punktu O.

Zadanie 2. Mając dwa różne punkty A i A' znaleźć taki punkt O, dla którego:

a) $J_O^{-1}(A) = A'$, b) $J_O^2(A) = A'$, c) $J_O^{-\frac{1}{2}}(A) = A'$.
Wskazówka: Narysujmy najpierw odcinek AA'.

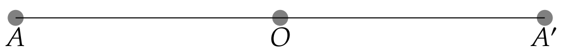


Zauważmy, że jeżeli $J_O^s(A) = A'$, to

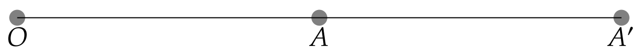
1) punkt O znajduje się między punktami A i A' wtedy i tylko wtedy, gdy $s < 0$,
2) punkt A' znajduje się między punktami O i A wtedy i tylko wtedy, gdy $0 < s < 1$,
3) punkt A znajduje się między punktami O i A' wtedy i tylko wtedy, gdy $s > 1$.

Szkic rozwiązania.

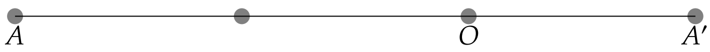
a) Skala jednokładności jest ujemna, zatem jej środek O jest między punktami A i A'. Ponadto $|OA| = |OA'|$, bo $s = -1$.



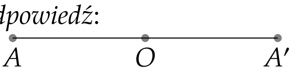
b) $s > 1$, zatem punkt A jest między punktami O i A'. Ponadto $|OA'| = 2|OA|$, więc $|OA| = |AA'|$

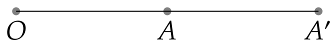


c) $s = -\frac{1}{2}$, zatem punkt O jest między punktami A i A'. Ponadto $|OA'| = \frac{1}{2}|OA|$, więc $|OA'| = \frac{1}{3}|AA'|$



Odpowiedź:

a) 

b) 

c) 

Zadanie 3. Mając dane dwa różne punkty O i X' znaleźć taki punkt X, dla którego:

a) $J_O^2(X) = X'$, b) $J_O^{-1}(X) = X'$, c) $J_O^{-3}(X) = X'$, d) $J_O^{\frac{3}{2}}(X) = X'$.

Wskazówka: Skorzystać z własności odwzorowania odwrotnego. Odwzorowaniem odwrotnym do J_O^s jest $J_O^{\frac{1}{s}}$.

Szkic rozwiązania. Odwzorowaniem odwrotnym do J_O^s jest $J_O^{\frac{1}{s}}$. Korzystając z tej własności możemy bezpośrenio znaleźć punkt X jako obraz punktu X' w odpowiedniej jednokładności.

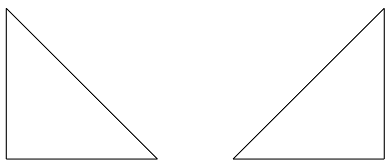
a) $X = J_O^{\frac{1}{2}}(X')$, b) $X = J_O^{-1}(X')$, c) $X = J_O^{-\frac{1}{3}}(X')$, d) $X = J_O^{\frac{2}{3}}(X')$.

Odpowiedź: a) $X = J_O^{\frac{1}{2}}(X')$, b) $X = J_O^{-1}(X')$, c) $X = J_O^{-\frac{1}{3}}(X')$, d) $X = J_O^{\frac{2}{3}}(X')$.

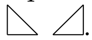
Zadanie 4. Podać przykład figur, które są podobne, ale nie są jednokładne.

Wskazówka: Odpowiednie boki figur jednokładnych są równoległe i proporcjonalne. Czy obydwie te własności muszą mieć figury podobne?

Szkic rozwiązania.



Podobieństwo powyższych figur jest oczywiste, są nawet przystające. Nie może natomiast istnieć jednokładność przekształcająca jeden trójkąt na drugi, bo wtedy obrazem przeciwprostokątnej pierwszego byłaby przeciwprostokątna drugiego trójkąta, ale odcinki jednokładne są równoległe. Sprzeczność, ponieważ przeciwprostokątne tych trójkątów nie są równoległe.

Odpowiedź: Np. .

Zadanie 5. Czy można twierdzić, że są podobne:

a) wszystkie trójkąty równoramienne,
b) wszystkie trójkąty równoboczne,
c) wszystkie trójkąty, które są jednocześnie prostokątne i równoramienne,
d) wszystkie romby,
e) wszystkie kwadraty,
f) wszystkie prostokąty,
g) wszystkie romby, mające po jednym kącie równym,
h) wszystkie równoległoboki, mające po jednym kącie równym?

Wskazówka: a) Czy podobieństwo zachowuje miary kątów? b), c) Czy zachodzi któraś z cech podobieństwa trójkątów z twierdzenia 4? d) Patrz wskazówka do a). e), f), g), h) Czy zachodzą wnioski (1) i (2) z definicji 5 ?

Szkic rozwiązania. a) Nie. Np. trójkąt równoboczny nie jest podobny do trójkąta prostokątnego równoramiennego.

b) Tak. Wynika to z cechy podobieństwa (kk).

c) Tak. Wynika to z cechy podobieństwa (bkb).

d) Nie. Kontrprzykład: kwadrat i romb nie będący kwadratem. W tej sytuacji nie ma odpowiedniości kątów.

e) Tak.

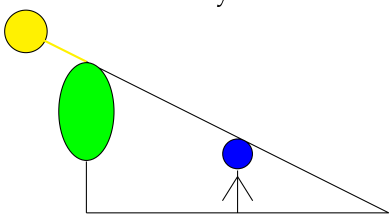
f) Nie. Kontrprzykład: kwadrat i prostokąt nie będący kwadratem. W tej sytuacji boki nie są proporcjonalne.

g) Tak. Miara jednego kąta rombu wyznacza miary pozostałych kątów. W naszej sytuacji będą one odpowiednio równe. A proporcjonalność długości boków jest oczywista.

h) Nie. Kontrprzykład: kwadrat i prostokąt nie będący kwadratem. W tej sytuacji boki nie są proporcjonalne.

Odpowiedź: a) nie, b) tak, c) tak, d) nie, e) tak, f) nie, g) tak, h) nie.

Zadanie 6. W celu oszacowania wysokości drzewa uczeń ustawił się tak, że koniec jego cienia pokrywał się z końcem cienia drzewa. Następnie zmierzył swój cień – 3, 6 m. Odległość ucznia od drzewa wynosiła 16,4 m. Jaka jest wysokość drzewa, jeśli uczeń ma 180 cm wzrostu.
Wskazówka: Skorzystać z własności trójkątów podobnych albo z twierdzenia Talesa.



Odpowiedź: 10 m.

Zadanie 7. Mając dane długości boków dwóch trójkątów rozstrzygnąć, czy są one podobne:

a) 4, 5, 6 i 10, 12, 8;

b) 3, 4, 6 i 9, 18, 15.

Wskazówka: Uporządkować w kolejności niemalejącej długości boków poszczególnych trójkątów. Czy długości boków dla odpowiednich par trojkątów są proporcjonalne?

Szkic rozwiązania. a) Z podanych długości boków możemy utworzyć proporcje

$$\frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12}.$$

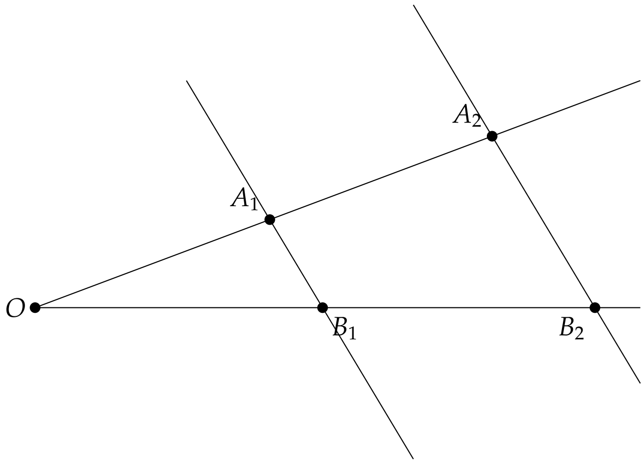
Zatem trójkąty są podobne na mocy cechy podobieństwa trójkątów (bbb).

b) Wypiszmy długości boków trójkątów w kolejności niemalejącej. Mamy 3, 4, 6 oraz 9, 15, 18. Gdyby podane trójkąty były podobne, to musiałyby zachodzić równości

$$\frac{3}{9} = \frac{4}{15} = \frac{6}{18},$$

sprzeczność. Podane trójkąty nie są podobne.
Odpowiedź: a) tak, b) nie.

Zadanie 8. Na poniższym rysunku proste A_1B_1 i A_2B_2 są równoległe. Pokazać, że trójkąty OA_1B_1 i OA_2B_2 są podobne.



Wskazówka: Skorzystać z warunku (3) z rozdziału Twierdzenie Talesa.

Szkic rozwiązania. Z wniosku (3) z twierdzenia Talesa (patrz rozdział Twierdzenie Talesa) mamy $\frac{|OA_1|}{|OA_2|} = \frac{|OB_1|}{|OB_2|}$. Zatem z cechy podobieństwa (bkb) wynika, że trójkąty OA_1B_1 i OA_2B_2 są podobne.

Zadania dodatkowe

Zadanie 9. Przeczytaj poniższy tekst i odpowiedz na pytania.

Przekształcenie płaszczyzny w płaszczyznę nazywamy *podobieństwem*, gdy istnieje taka liczba $k > 0$, że gdy obrazami punktów A i B są punkty A' i B', to $A'B' = k \cdot AB$.

Mówimy, że dwie figury geometryczne są *podobne*, gdy istnieje podobieństwo przekształcające jedną z nich na drugą.

Pytania do tekstu.

1. Co to jest „przekształcenie płaszczyzny w płaszczyznę”?

   Odpowiedź. Funkcja (odwzorowanie, przekształcenie), której dziedziną oraz przeciwdziedziną jest płaszczyzna.

2. Jakie znasz oznaczenia na odległość dwóch punktów? Jakie są ich zalety i wady?

   Odpowiedź. Niech A i B oznaczają dwa punkty.

   $d(A, B)$ Zaleta: widać, że odległość to *funkcja*, której argumentem jest para punktów. Wada: długość (aż 6 znaków!).

   $|\overline{AB}|$ Zaleta: widać, że odległość (czy raczej długość odcinka) jest funkcją, której argumentem jest odcinek (oznaczany tu przez $\overline{AB}$), i to funkcją o własnościach analogicznych do wartości bezwzględnej. Wada: mała wygoda używania (aż 5 znaków).

   $|AB|$ Zaleta: wygoda (tylko 4 znaki). Wada: symbol AB raczej nie jest używany do oznaczania odcinka, więc notacja ta nie ma zalety poprzedniej.

   AB Zaleta: wygoda (najkrótsze oznaczenie ze wszystkich!). Wada: niejednoznaczność (często AB oznacza np. prostą przechodzącą przez punkty A i B).

   Ogólnie, warto zawsze uściślić, jak oznaczamy odcinek, prostą i odległość, żeby nie doprowadzić do nieporozumień.

3. Czemu służą słowa „nazywamy” (linia 1) i „mówimy” (linia 3)?

   Odpowiedź. Słowa te informują czytelnika, że ma do czynienia z definicją, szczególnie w przypadku (jak tutaj), w którym nie zaczyna się ona nagłówkiem „Definicja”.

4. Z jakich części składa się pierwszy akapit powyższego tekstu? A drugi? W jakim celu użyto kursywy w liniach 1 i 3?

   Odpowiedź. Zarówno akapit pierwszy, jak i drugi, składają się z *definiendum* (terminu definiowanego, tradycyjnie wyróżnionego kursywą) oraz *definiensa*, czyli członu definiującego.

5. Czy symetria osiowa jest podobieństwem? A obrót? Przesunięcie o wektor? Sformułuj i udowodnij fakt obejmujący wszystkie te przypadki.

   Odpowiedź. Tak, tak, tak. Ogólnie, każda izometria jest podobieństwem (o skali 1). (Szkic dowodu: Niech f będzie izometrią płaszczyzny; połóżmy $k = 1$, wówczas $d\big(f(A), f(B)\big) = k \cdot d(A, B)$.)

6. Wskaż przykład podobieństwa nie będącego izometrią.

   Odpowiedź. Dowolne podobieństwo o skali różnej od 1.

7. Wskaż przykład przekształcenia płaszczyzny nie będącego podobieństwem.

   Odpowiedź. Powinowactwo prostokątne o skali różnej od ± 1. (Powinowactwo prostokątne o pewnej skali i osi, to „skalowanie” figury w kierunku prostopadłym do tej osi czynnikiem równym skali.)

8. Czy odwzorowanie stałe jest podobieństwem? Dlaczego?

   Odpowiedź. Nie – w definicji zastrzeżono, że $k > 0$, dla odwzorowania stałego byłoby $k = 0$.

9. Udowodnij, że każde podobieństwo jest przekształceniem różnowartościowym.

   Odpowiedź. Gdyby f było podobieństwem o skali $k > 0$ i $f(A) = f(B)$, to byłoby $0 = d\big(f(A), f(B)\big) = k \cdot d(A, B)$, więc $A = B$.

10. (a) Co by się stało, gdyby warunek $k > 0$ z definicji podobieństwa zastąpić warunkiem $k \neq 0$? (b) A warunkiem $k \in \mathbb{R}$?

    Odpowiedź. (a) Nic by się nie stało: ponieważ odległość dwóch punktów jest zawsze nieujemna, „podobieństwo o skali ujemnej” nie może istnieć. Zatem taka definicja byłaby równoważna wyjściowej (tzn. przy tej „nowej” definicji te same przekształcenia byłyby podobieństwami), tyle że „nieekonomiczna”: przypadek $k < 0$ nigdy by nie zachodził. (Wiele osób uznałoby, że – z tego samego powodu – „nowa” definicja byłaby również mniej *estetyczna*.)

    (b) Dopuszczając przypadek $k = 0$, status podobieństwa przyznalibyśmy odwzorowaniom stałym. Ponieważ różnowartościowość podobieństwa (jak również parę innych własności, które nie zachodzą dla przypadku $k = 0$) jest przydatną własnością, wygodniej jest umówić się, że skala podobieństwa nie może być zerem. (Warto zwrócić uwagę, że – inaczej niż poza matematyką – to, *jaką* dokładnie przyjmiemy definicję, jest kwestią całkowicie umowną.)

11. Co to jest „figura geometryczna”? Czy punkt na płaszczyźnie jest figurą geometryczną?

    Odpowiedź. Figura geometryczna (na płaszczyźnie), to jakikolwiek zbiór punktów tej płaszczyzny (innymi słowy, podzbiór płaszczyzny). W związku z tym, pojedynczy punkt płaszczyzny (nazwijmy go A) *nie* jest figurą geometryczną, natomiast jednopunktowy zbiór $\{A\}$ (zawierający tylko punkt A) już nią jest.

12. Niech A, B, C, D będą czterema punktami płaszczyzny, przy czym $A \neq B$ i $C \neq D$. Kiedy odcinki AB i CD są podobne?

    Odpowiedź. Zawsze, przy czym skala podobieństw wynosi $\frac{d(C,D)}{d(A,B)}$, jeśli mamy na myśli podobieństwo przekształcające odcinek AB na odcinek CD lub $\frac{d(A,B)}{d(C,D)}$, jeśli mamy na myśli podobieństwo przekształcające odcinek CD na odcinek AB.

13. Niech S, T będą dwoma punktami płaszczyzny i niech $q, r > 0$. Kiedy okręgi $\mathcal{O}(S, q)$ i $\mathcal{O}(T, r)$ są podobne?

    Odpowiedź. Zawsze, przy czym skala podobieństwa wynosi r/q lub q/r.

14. Kiedy dwa trójkąty są podobne?

    Odpowiedź. Kwestię tę rozstrzygają twierdzenia zwane *cechami podobieństwa trójkątów*.

15. Wskaż przykład dwóch figur geometrycznych, które nie są podobne.

    Odpowiedź. Np. punkt (ściślej: zbiór jednopunktowy) i odcinek.

16. Rozważmy pewne odwzorowanie płaszczyzny. Odwzorowanie to przekształca punkty $A = (0, 0)$ i $B = (1, 0)$ w punkty $A' = (-1, -1)$ oraz $B' = (2, 3)$. Czy można stąd wywnioskować, że odwzorowanie to jest podobieństwem o skali 5?

    Odpowiedź. Nie, gdyż odpowiedni stosunek odległości zachodzi tylko między parami punktów A, B i A', B'. Stąd, że istnieją takie punkty A, B, których obrazami są A' i B' odpowiednio, że $d(A', B') = kd(A, B)$, nie można wnioskować, że analogiczna relacja zachodzi dla dowolnych *innych* par punktów.

Zadanie 10. Czy istnieje jednokładność o skali $s \neq 1$ przekształcająca na siebie:
a) odcinek, b) prostą, c) półprostą, d) okrąg?
Wskazówka: Szukamy jednokładności, które przekształcają dana figurę na nią samą i które jednocześnie nie są identycznościami, tzn. że szukane jednokładności przekształcają pewne punkty danej figury w inne punkty tej figury.

Szkic rozwiązania.
a) Jednokładność o środku w połowie odcinka i skali -1.
b) Dowolna jednokładność o środku w dowolnym punkcie na danej prostej i dowolnej skali.
c) Dowolna jednokładność o środku w początku półprostej (nawet, jeżeli jest otwarta) i dowolnej skali dodatniej.
d) Jednokładność o środku w środku okręgu i skali -1.
Odpowiedź: a) tak, b) tak, c) tak, d) tak.

Zadanie 11. Mając dwa różne punkty A i A' znaleźć taki punkt O, dla którego:
a) $J_O^{-3}(A') = A$, b) $J_O^{3}(A') = A$, c) $J_O^{\frac{1}{2}}(A) = A'$.
Wskazówka: Patrz zadanie 2.

Zadanie 12. Czy złożenie dwóch podobieństw jest podobieństwem?
Wskazówka: Sprawdzić, czy spełniona jest definicja 4.

Szkic rozwiązania. Niech P będzie podobieństwem o skali k_1, a Q podobieństwem o skali k_2. Dla dowolnych punktów płaszczyzny X, Y mamy $|(P \circ Q)(X)(P \circ Q)(Y)| = |P(Q(X))P(Q(Y)| = k_1|Q(X)Q(Y)| = k_1k_2|XY|$. Zatem $P \circ Q$ jest podobieństwem o skali k_1k_2.
Odpowiedź: Tak.

Zadanie 13. Czy trójkąty z Rysunku 1 są podobne?
Wskazówka: Czy trójkaty te spełniają którąś z cech podobieństwa z twierdzenia 4?

Szkic rozwiązania. Tak. Możemy tu np. wykorzystać wnioski z tw. Talesa, tzn. $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$ i skorzystać z cechy podobieństwa (bbb).
Odpowiedź: Tak.

Zadanie 14. Czy złożenie dwóch jednokładności jest podobieństwem?
Wskazówka: Patrz twierdzenie 1.

Szkic rozwiązania. Tak. Wynika to bezpośrednio z twierdzenia 1.
Odpowiedź: Tak.

Zadanie 15. Wykazać, że jeżeli dwa wielokąty są podobne w skali k, to stosunek obwodów tych wielokątów też równa się k.
Wskazówka: Dla boków wielokątów podobnych mamy $|A'B'| = k|AB|$.

Szkic rozwiązania. Skoro wielokąty są podobne w skali k, to oznacza, że stosunek długości odpowiednich boków równa się k, zatem i stosunek obwodów równa się k.

Zadanie 16. Figura F_1 jest podobna do F_2 w skali k, a figura F_2 jest podobna do F_1 w skali $2k$. Wyznaczyć k.
Wskazówka: Rozważyć złożenie tych dwóch podobieństw.

Szkic rozwiązania. Złożenie podobieństw w skali k_1 i k_2 jest podobieństwem skali $k_1 \cdot k_2$. Złożenie podobieństw z treści zadania jest identycznością, a przekształcenie identycznościowe jest podobieństwem o skali 1, zatem $k \cdot 2k = 1$, czyli $k^2 = \frac{1}{2}$, a stąd mamy $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$, bo $k > 0$.
Odpowiedź: $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Zadanie 17. Mając dane długości boków dwóch trójkątów rozstrzygnąć, czy są one podobne:
a) 17, 34, 25 i 100, 50, 70
b) 2, 2, 1 i 0.25, 0.5, 0.5.
Wskazówka: Patrz zadanie 7.

Szkic rozwiązania. a) Wypiszmy długości boków trójkątów w kolejności niemalejącej. Mamy $17, 25, 34$ oraz $50, 70, 100$. Gdyby podane trójkąty były podobne, to musiałyby zachodzić równości

$$\frac{17}{50} = \frac{25}{70} = \frac{34}{100},$$

sprzeczność. Podane trójkąty nie są podobne.
b) Podane długości boków są proporcjonalne

$$\frac{2}{0.5} = \frac{2}{0.5} = \frac{1}{0.25}.$$

Zatem trójkąty są podobne na mocy cechy podobieństwa trójkątów (bbb).
Odpowiedź: a) nie, b) tak.

Zadanie 18. Dany trójkąt ma boki długości $6, 8, 13$. Najkrótszy bok trójkąta podobnego do danego ma długość 21. Jaką długość mają pozostałe boki drugiego trójkąta?
Wskazówka: Wyznaczyć skalę k podobieństwa.

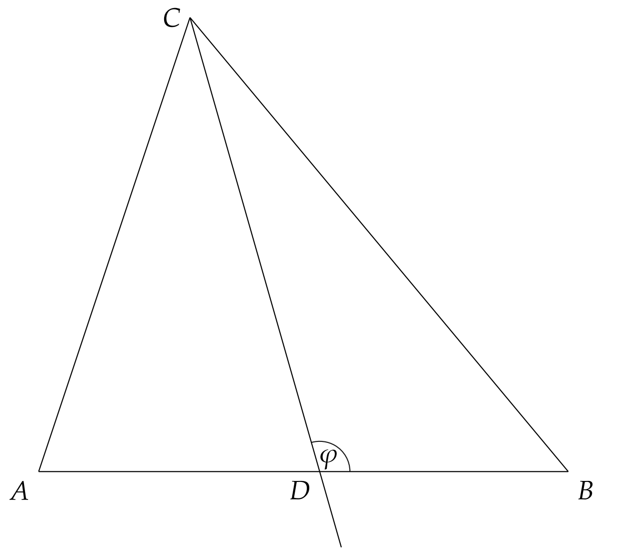
Szkic rozwiązania. Oznaczmy szukane długości boków drugiego trójkąta przez x, y. Z faktu, że najkrótszy bok drugiego trójkąta ma długość 21 i z cechy podobieństwa trójkątów (bbb) mamy proporcje

$$3.5 = \frac{21}{6} = \frac{x}{8} = \frac{y}{13}.$$

Stąd otrzymujemy $x = 28, y = 45,5$.
Odpowiedź: 28; 45,5.

Zadanie 19. Trójkąt ABC jest ostrokątnym trójkątem różnobocznym. Zbadać, czy istnieje prosta przechodząca przez jeden z wierzchołków trójkąta i dzieląca ten trójkąt na dwa trójkąty podobne.
Wskazówka: Rozważyć następujące przypadki: gdy jeden z powstałych trójkątów jest ostrokątny, gdy jeden z powstałych trójkątów jest prostokątny.

Szkic rozwiązania. Przypuśćmy, że taka prosta istnieje. Bez utraty ogólności możemy założyć, że przechodzi przez wierzchołek C. Oznaczmy punkt przecięcia boku AB tą prostą przez D.



Jeżeli $\varphi \neq 90°$, to jeden z trójkątów ADC, DBC jest rozwartokątny, a drugi ostrokątny, więc nie mogą być podobne.

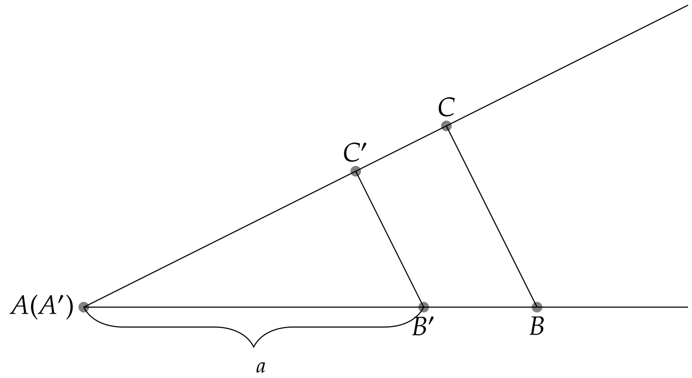
Załóżmy, że $\varphi = 90°$. Gdyby trójkąty ADC, DBC były podobne, to musiałoby być $\measuredangle ACD = \measuredangle ABC, \measuredangle DCB = \measuredangle BAC$, co wynika z cechy podobieństwa (kk), bo trójkąt ABC jest różnoboczny. Ale wtedy $\measuredangle ACB = \measuredangle ACD + \measuredangle DCB = \measuredangle ABC + \measuredangle DCB = 90°$, sprzeczność z założeniem, że trójkąt ABC jest ostrokątny.
Odpowiedź: Taka prosta nie istnieje.

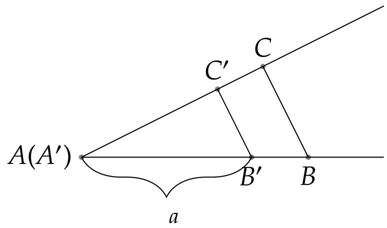
Zadanie 20. Mając dany trójkąt ABC i odcinek długości a, skonstruować trójkąt $A'B'C'$ podobny do danego tak, aby $|A'B'| = a$.
Wskazówka: Można przyjąć, że trójkąty ABC i $A'B'C'$ są tak położone, że $A = A'$ i punkt B' leży

na półprostej będącej przedłużeniem boku AB. Punkt B' zaznaczyć tak aby $|A'B'| = a$. Dalej wystarczy skorzystać z twierdzenia Talesa albo z własności trójkątów podobnych.

Szkic rozwiązania.

Na ramieniu AB kąta CAB odkładamy odcinek o długości a. Początek tego odcinka oznaczmy przez A', a koniec przez B'. Oczywiście $|A'B'| = a$. Następnie przez punkt B' poprowadźmy prostą równoległą do BC. Prosta ta przetnie ramię AC kąta CAB w punkcie C'. Podobieństwo trójkątów ABC i $A'B'C'$ wynika od razu z cechy (kk).





Odpowiedź:

Zadanie 21. Następujące zdania mają wyrażać cechy podobieństwa figur. Zbadać, które są prawdziwe, a które fałszywe. Odpowiedź uzasadnić. Niektóre ze zdań zawierają zbyt wiele warunków. Wskazać, co można pominąć.

a) Jeżeli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta, to te trójkąty są podobne.

b) Jeżeli dwa trapezy mają kąty odpowiednio przystające, to są podobne.

c) Jeżeli w trójkątach ABC i $A'B'C'$ odcinki AA_1 i $A'A'_1$ są odpowiednio środkowymi boków BC i $B'C'$ oraz $\frac{|AB|}{|AA_1|} = \frac{|A'B'|}{|A'A'_1|}$ oraz $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|A'B'|}$, to te trójkąty są podobne. **Wskazówka. Rozważ rówoległobok o bokach AB i AC oraz równoległobok o bokach $A'B'$ i $A'C'$.**

d) Jeżeli wycinki dwóch kół są wyznaczone przez dwa przystające kąty środkowe oraz odpowiadające im cięciwy są proporcjonalne do promieni tych kół, to te wycinki są podobne.

Wskazówka: a) Czy własność (b, b) wystarcza dla podobieństwa trójkatów? b) Czy to zapewnia proporcjoalność boków tych trapezów? d) Dla przystających kątów środkowych długości łuków i promieni są proporcjonalne.

Szkic rozwiązania.

a) Nie. Proporcjonalność dwóch boków nie wystarczy. Rozważmy dwa trójkąty, jeden o bokach długości 4, 4, 4, a drugi o bokach długości 4, 4, 5. Długości dwóch boków są proporcjonalne, mimo że trójkąty nie są podobne, bo pierwszy jest równoboczny, a drugi nie.

b) Nie. Kontrprzykład: kwadrat i prostokąt, który nie jest kwadratem.

c) Zgodnie ze wskazówką rozważmy równoległoboki $ABCD$ ($AB \parallel CD, AC \parallel BD$) i $A'B'C'D'$ ($A'B' \parallel C'D', A'C' \parallel B'D'$). Trójkąty ABC i BDC są przystające. Podobnie trójkąty $A'B'C'$ i $B'D'C'$ są przystające. Zatem $|AD| = 2|AA_1|$ oraz $|A'D'| = 2|A'A_1'|$. Stąd, z oczywistych równości $|AC| = |BD|, |A'C'| = |B'D'|$ oraz warunków zadania mamy

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BD|}{|B'D'|} = \frac{|AD|}{|A'D'|}.$$

Na podstawie cechy (bbb) wnioskujemy, że trójkąty ABD i $A'B'D'$ są podobne, więc i równoległoboki $ABCD$ i $A'B'C'D'$ są podobne, a stąd mamy, że trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne.

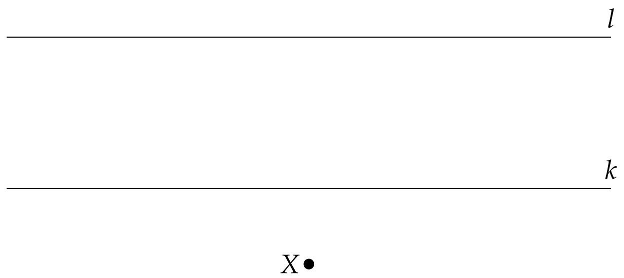
d) Tak. Wycinek kołowy jest wyznaczony przez kąt środkowy. Dlatego drugi z warunków można pominąć.

Odpowiedź: a) nie, b) nie, c) tak, d) tak (drugi warunek można pominąć).

Zadanie 22. Dane są dwie proste równoległe k i l oddalone od siebie o a. Jaką figurę tworzą punkty X takie, dla których jednokładność J_X^s, gdzie $s > 1$ jest ustalone, przekształca prostą k na prostą l?

Wskazówka: Punkt X nie może leżeć pomiędzy prostymi k i l. Jeśli pewien punkt X spełnia warunki zadania, to spełnia je też każdy punkt z prostej równoległej do prostych k i l przechodzącej przez punkt X.

Szkic rozwiązania.



Jeżeli proste k i l są położone jak na powyższym rysunku, to punkt X znajduje się poniżej prostej k, bo $s > 1$. Jeżeli punkt X jest odległy od prostej k o t, to jego odległość od prostej l wynosi st. Z drugiej strony odległość punktu X od prostej l wynosi $t + a$. Mamy więc równość $st = t + a$, stąd $t = \frac{a}{s-1}$. Zatem punkty spełniające warunki zadania tworzą prostą m odległą od prostej k o $\frac{a}{s-1}$, przy czym prosta k znajduje się między prostymi m i l.

Odpowiedź: Prosta m odległa od prostej k o $\frac{a}{s-1}$, przy czym prosta k znajduje się między prostymi m i l.

Zadanie 23. Przez wierzchołki trójkąta ABC prowadzimy proste równoległe do przeciwległych boków i otrzymujemy trójkąt $A'B'C'$. Pokazać, że trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne.

Wskazówka: Rozważyć dwie pary prostych równoległych i wyznaczone przez nie równoległoboki.

Szkic rozwiązania.

Punkt A' jest przecięciem przedłużenia prostych równoległych do boków AB i AC.

Punkt B' jest przecięciem przedłużenia prostych równoległych do boków AB i BC.

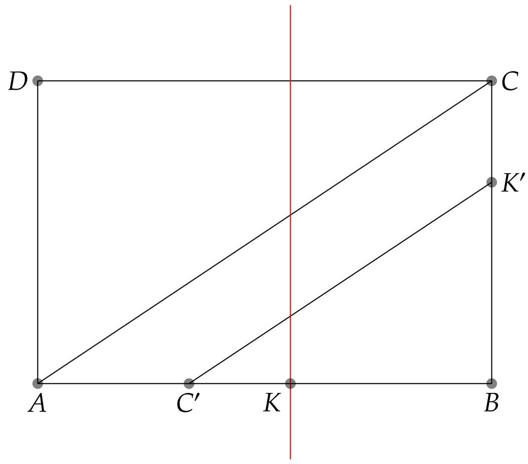
Punkt C' jest przecięciem przedłużenia prostych równoległych do boków BC i AC.

I sposób: Boki trójkąta $A'B'C'$ są dwa razy dłuższe od boków trójkąta ABC. Zatem z cechy podobieństwa (bbb) dane trójkąty są podobne.

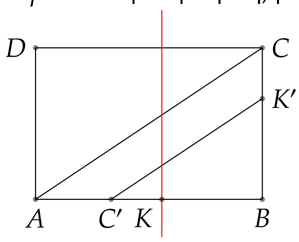
II sposób: $\measuredangle B'A'C' = \measuredangle BAC$, bo kąty te są naprzemianległe w czworokącie (równoległoboku) $ABA'C$. Analogicznie $\measuredangle C'B'A' = \measuredangle CBA$ (także $\measuredangle A'C'B' = \measuredangle ACB$). Zatem podobieństwo trójkątów ABC i $A'B'C'$ wynika z cechy (kk).

Zadanie 24. Mając dany prostokąt $ABCD$ skonstruować prostą, która odcina od danego prostokąta prostokąt do niego podobny.
Wskazówka: Czy rozważany prostokąt może być kwadratem? Czy szukana prosta może być równoległa do dłuższego boku prostokąta? Zapisać odpowiednie proporcje jakie powinny zachodzić pomiędzy długościami odpowiednich boków prostokąta $ABCD$ i powstającego prostokąta podobnego.

Szkic rozwiązania. Zadanie nie ma rozwiązania, gdy prostokąt jest kwadratem. Zauważmy, że prosta odcinająca prostokąt podobny musi być równoległa do jednego z boków. Nie może to być prosta równoległa do dłuższego z boków. Załóżmy więc, że $|AB| > |BC|$ Taką prostą jest prosta przechodząca przez punkt $K \in AB$, dla którego $\frac{|KB|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AB|}$ (równoważnie $|KB| = \frac{|BC|^2}{|AB|}$), którą możemy skonstruować w następujący sposób: Na boku AB wyznaczamy punkt C' taki, że $|BC'| = |BC|$. Prosta przechodząca przez punkt C' i równoległa do AC przecina bok BC w punkcie K'. Z konstrukcji wynika, że $\frac{|K'B|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AB|}$. Wystarczy teraz wyznaczyć punkt K na prostej AB taki, że $|KB| = |K'B|$.



Odpowiedź: $|BC'| = |BC|$, $|K'B| = |KB|$.



Zadanie 25. Jakie muszą być długości boków prostokąta $ABCD$, aby istniała prosta dzieląca dany prostokąt na dwa prostokąty, z których każdy jest podobny do prostokąta $ABCD$.
Wskazówka: Z zadania 24 wynika, że K musi być środkiem boku AB.

Szkic rozwiązania. Załóżmy, że $|AB| > |BC|$. Niech K oznacza ten sam punkt co w zadaniu 24. Skoro oba prostokąty powstałe po podziale mają być podobne do prostokąta $ABCD$, to korzystając

z zadania 24 wnioskujemy, że $|KB| = \frac{|BC|^2}{|AB|}$ oraz $|KA| = \frac{|BC|^2}{|AB|}$. Zatem K jest środkiem boku AB i $\frac{1}{2}|AB| = \frac{|BC|^2}{|AB|}$, stąd $|AB| = \sqrt{2}|BC|$.
Odpowiedź: $|AB| = \sqrt{2}|BC|$.

Zadanie 26. Na boku BC trójkąta ABC obrano punkt D, taki że $|BD| : |DC| = 2 : 1$. W jakim stosunku środkowa CM dzieli odcinek AD?
Wskazówka: Przez punkt D przeprowadzić prostą równoległą do boku AB. Przez punkt przecięcia prostych AD i środkowej CM poprowadzić prostą równoległą do AB. Rozważyć odpowiednie pary trójkątów podobnych.

Szkic rozwiązania. Niech M oznacza środek boku AB, O oznacza punkt przecięcia środkowej CM i odcinka AD, E oznacza punkt przecięcia środkowej CM przez prostą przechodzącą przed D i równoległą do AB, a F oznacza punkt przecięcia boku BC przez prostą przechodzącą przez O i równoległą do AB. Z warunków zadania mamy $|BD| = \frac{2}{3}|BC|$ oraz $|DC| = \frac{1}{3}|BC|$. Z podobieństwa trójkątów MBC i EDC mamy

$$\frac{|ED|}{|CD|} = \frac{|MB|}{|BC|},$$

zatem

$$|ED| = \frac{|DC|}{|BC|}|MB| = \frac{\frac{1}{3}|BC|}{|BC|}\frac{|AB|}{2} = \frac{1}{6}|AB|.$$

Z podobieństwa trójkątów EDC i OFC mamy

$$\frac{|ED|}{|DC|} = \frac{|OF|}{|FC|},$$

stąd

$$|OF| = \frac{|ED|}{|DC|} \cdot |FC| = \frac{\frac{1}{6}|AB|}{\frac{1}{3}|BC|}(|FD| + |DC|) = \frac{|AB|}{2|BC|}(|FD| + |DC|) \tag{3}$$

Z podobieństwa trójkątów ABD i OFD mamy

$$\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|OF|}{|FD|},$$

stąd

$$|OF| = \frac{|AB|}{|BD|} \cdot |FD| = \frac{|AB|}{\frac{2}{3}|BC|}|FD| = \frac{3|AB|}{2|BC|} \cdot |FD|. \tag{4}$$

Z (3) i (4) otrzymujemy

$$\frac{|AB|}{2|BC|}(|FD| + |DC|) = \frac{3|AB|}{2|BC|} \cdot |FD|,$$

stąd $|FD| + |DC| = 3|FD|$, a więc $|FD| = \frac{1}{2}|DC| = \frac{1}{4}|BD|$, stąd wynika, że $|BF| : |FD| = 3 : 1$. Z tw. Talesa otrzymujemy $|AO| : |OD| = 3 : 1$.
Odpowiedź: 3 : 1.

Zadania domowe

Zadanie 27. Czy złożenie dwóch jednokładności jest jednokładnością?
Wskazówka: Jednokładności nie muszą mieć tego samego środka.
Odpowiedź: Nie

Zadanie 28. Wykazać, że jeżeli dwa trójkąty są podobne w skali k, to stosunek:
a) odpowiednich wysokości tych trójkątów,
b) odpowiednich dwusiecznych tych trójkątów,
c) odpowiednich środkowych tych trójkątów,
także wynosi k.
Wskazówka: Dla rozważenia długości odpowiednich odcinków w tych trójkątach, można ustawić je tak, by jeden z wierzchołków jednego trójkąta pokrywał się z odpowiednim wierzchołkiem drugiego trójkąta i jednocześnie, by odpowiednie boki tych trójkątów leżały na jednej prostej. Dalej można skorzystać z własności trójkątów podobnych albo z twierdzenia Talesa.

Zadanie 29. Dany jest trójkąt ABC o bokach długości $a = |BC|, \quad b = |CA|, \quad c = |AB|$. Zbudowano sześciokąt $MNPQRS$ za pomocą jednokładności

$$M = J_A^2(B), \quad N = J_A^2(C), \quad P = J_B^2(C),$$

$$Q = J_B^2(A), \quad R = J_C^2(A), \quad S = J_C^2(B).$$

Znaleźć boki tego sześciokąta.
Wskazówka: Jak zmieniają się długości boków w tej jednokładności ? Skorzystać z definicji jednokładności.
Odpowiedź: $2a, c, 2b, a, 2c, b$

Zadanie 30. Mając dany trójkąt ABC i odcinek długości a, skonstruować trójkąt $A'B'C'$ podobny do danego, którego obwód równa się a.
Wskazówka: Odcinek o długości a podzielić na 3 części o długościach proporcjonalnych do długości odpowiednich boków trójkąta ABC. Skorzystać z twierdzenia Talesa.

Zadanie 31. Mając dany prostokąt $ABCD$ i odcinek długości a, skonstruować prostokąt podobny do danego, w którym przekątna ma długość a.
Wskazówka: Skonstruować odcinek o długości z taki, że $\frac{AC}{z} = \frac{BC}{a}$. Skorzystać z własności trójkątów podobnych.

Literatura

(a) Z. Krygowska, Geometria dla klas 1 i 2 liceum ogólnokształcącego, 1, 2 i 3 technikum, wyd.IV, WSiP, Warszawa, 1982.
(b) A. Łomnicki, G. Treliński, Geometria dla klasy I liceum ogólnokształcącego, liceum zawodowego i technikum, wyd.III, WSiP, Warszaw,1988.
(c) S. Mizia, Wykaż, że ... Zbiór zadań z geometrii, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław, 2011.
(d) K. Szymański, N. Dróbka, Matematyka w szkole średniej, Powtórzenie i zbiór zadań, wyd.IV, WNT, Warszawa, 2004.