Twierdzenia o czworokącie wpisanym w okrąg i o czworokącie opisanym na okręgu.

Adrian Łydka
Bernadeta Tomasz

Teoria

Definicja 1. Klasyfikacja czworokątów (wypukłych):
Trapez jest czworokątem, w którym co najmniej jedna para boków jest równoległa.
Równoległobok jest czworokątem, w którym przeciwległe boki są równoległe.
Romb jest równoległobokiem, który ma wszystkie boki równe.
Prostokąt jest równoległobokiem, w którym wszystkie kąty są proste.
Kwadrat jest prostokątem, którego wszystkie boki są równe.

Definicja 2. *Okręgiem opisanym* na czworokącie nazywamy okrąg przechodzący przez wszystkie wierzchołki czworokąta.

Definicja 3. *Okręgiem wpisanym* w czworokąt nazywamy okrąg styczny do wszystkich boków czworokąta.

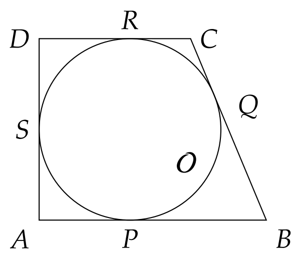
Lemat 1. *Z punktu A położonego na zewnątrz okręgu o środku O można poprowadzić dwie styczne do tego okręgu. Niech punkty P i Q będa punktami styczności. Półprosta AO jest dwusieczną kąta PAQ utworzonego przez styczne, a odcinki AP i AQ są równe.*

Szkic dowodu.
Trójkąty OPA i OQA są prostokątne, ponieważ kąty między promieniami i stycznymi do okręgu w punktach P i Q są proste; mają wspólną przeciwprostokątną OA i równe co do długości przyprostokątne OP i OQ (promień okręgu). Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $|AP| = \sqrt{|AO|^2 - |OP|^2} = \sqrt{|AO|^2 - |OQ|^2} = |AQ|$.

Twierdzenie 1. *(Twierdzenie o czworokącie opisanym na okręgu)*
W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta są równe.

Szkic dowodu.
1) Implikacja "jeśli w czworokąt można wpisać okrąg, to sumy długości przeciwległych boków czworokąta są równe", wynika z lematu 1.
Załóżmy, że w czworokąt można wpisać okrąg. Oznaczmy go przez $\mathcal{O}$, a przez P, Q, R, S punkty styczności tego okręgu odpowiednio z bokami AB, BC, CD, DA powyższego czworokąta. Z lematu 1 wynika, że $|AP| = |AS|$, $|BP| = |BQ|$, $|CQ| = |CR|$, $|DR| = |DS|$. Zatem

$$|AB| + |CD| = |AP| + |BP| + |DR| + |CR| = |AS| + |BQ| + |DS| + |CQ| = |BC| + |AD|.$$



2) Implikację, "Jeśli sumy długości przeciwległych boków czworokąta są równe, to w czworokąt ten można wpisać okrąg", udowodnimy metodą nie wprost. Załóżmy, że sumy długości przeciwległych boków czworokąta są równe i przypuśćmy, że w czworokąt $ABCD$ nie można wpisać okręgu. Oznaczmy przez O_1 okrąg styczny do boków AB, BC i CD czworokąta (taki okrąg istnieje, jego środkiem jest punkt przecięcia dwusiecznych kątów ABC i BCD). Zatem okrąg O_1 nie jest styczny do boku AD czworokąta. Przez punkt A prowadzimy prostą styczną do okręgu O_1, a punkt jej przecięcia z bokiem CD oznaczmy przez E. Z założenia mamy

$$|AB| + |CD| = |BC| + |AD|,$$

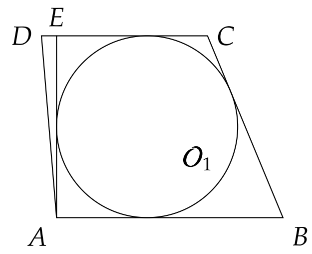
a ponieważ okrąg O_1 jest wpisany w czworokąt $ABCE$, to z 1) mamy

$$|AB| + |CE| = |EA| + |BC|.$$

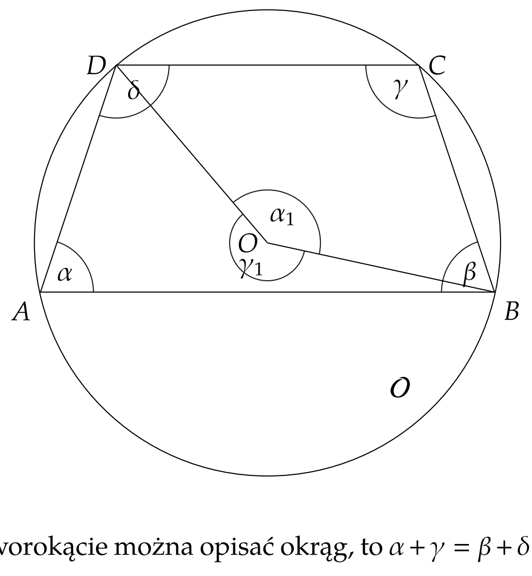
Po odjęciu tych równości stronami otrzymujemy:

$$|CD| - |CE| = |AD| - |EA|, \qquad \text{tzn.} \quad |DE| + |EA| = |AD| \quad \text{co jest niemożliwe.}$$

Zatem odcinek $|AD|$ jest styczny do okręgu O_1.



Twierdzenie 2. *(Twierdzenie o czworokącie wpisanym w okrąg)*
Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy przeciwległych kątów wewnętrznych są równe, tzn. $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$.



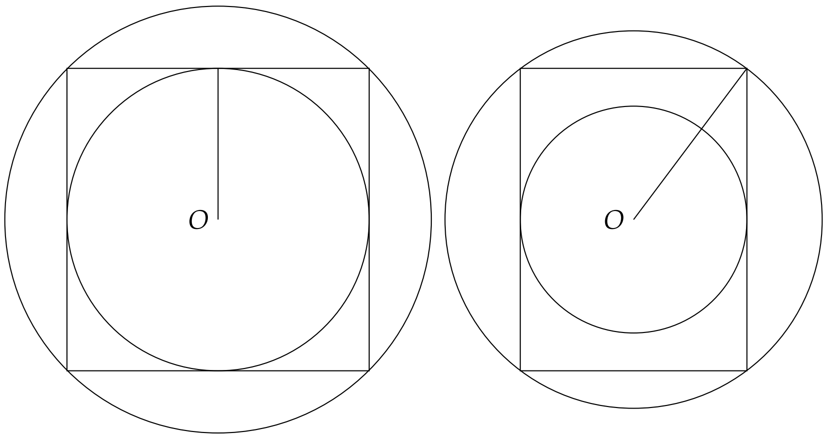
Szkic dowodu.
1) Implikacja: Jeśli na czworokącie można opisać okrąg, to $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$, wynika wprost z

twierdzenia o kątach wpisanym i środkowym w okręgu, wspartych na tym samym łuku. Dla kąta wpisanego BAD i środkowego α_1 opartych na łuku BCD mamy $\measuredangle BAD = \frac{1}{2}\alpha_1$ oraz analogicznie dla kątów wpisanego BCD i środkowego γ_1 opartych na łuku BAD mamy $\measuredangle BCD = \frac{1}{2}\gamma_1$. Suma miar kątów środkowych α_1 i γ_1 jest równa 360°, gdyż kąty te są oparte na łukach dopełniajacych okręgu. Mamy zatem $\measuredangle BAD + \measuredangle BCD = 180°$. Dla drugiej pary kątów w czworokącie $ABCD$ dowód przebiega analogicznie.
2) Implikacja: Jeśli sumy miar przeciwległych kątów w czworokącie są równe ($\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$), to na tym czworokącie można opisać okrąg. Załóżmy, że $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$. Oznaczmy przez $\mathcal{O}$ okrąg opisany na trójkącie ABC. Wykażemy stosujac metodę "nie wprost", że $D \in \mathcal{O}$. Przypuśćmy, że $D \notin \mathcal{O}$, to znaczy, że D leży wewnątrz albo na zewnątrz koła ograniczonego okręgiem $\mathcal{O}$. Z tego wynika, że δ jest albo większy albo mniejszy od kąta $180° - \beta$, co jest sprzeczne z założeniem. Zatem okrąg $\mathcal{O}$ jest opisany na czworokącie $ABCD$, co kończy dowód.

Uwaga 1. Twierdzenie 1 (2) podaje warunek konieczny i dostateczny wpisywalności (opisywalności) okręgu w (na) czworokącie.

Przykład 1. Narysuj okrąg wpisany w dany kwadrat. Czy można wpisać okrąg w prostokąt? Jaką własność ma środek okręgu wpisanego w dany czworokąt?

Szkic rozwiązania. Środek okręgu wpisanego w kwadrat jest punktem równoodległym od boków kwadratu, leży zatem w punkcie przecięcia dwusiecznych wszystkich jego kątów.
Środek okręgu wpisanego w prostokąt powinien być równo oddalony od każdego z boków czworokąta. W prostokącie, który nie jest kwadratem, odległości dwóch par boków równoległych są różne, stąd nie można wpisać okręgu w prostokąt.



Przykład 2. Narysuj okrąg opisany na kwadracie. Narysuj okrąg opisany na prostokącie. Jaką własność ma środek okręgu opisanego na czworokącie?

Szkic rozwiązania. Środek okręgu opisanego na czworokącie jest równo oddalony od wierzchołków czworokąta. Taką własność, zarówno w kwadracie jak i w prostokącie, ma punkt przecięcia symetralnych boków tych czworokątów.

Uwagi metodologiczne.
1) Jeżeli w czworokąt można wpisać okrąg, to jego środek jest punktem równo oddalonym od boków. Zatem środek okręgu jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych czworokąta.
2) Jeżeli na czworokącie można opisać okrąg, to jego środkiem jest punkt równo oddalony od wierzchołków czworokąta. Zatem środek okręgu jest punktem przecięcia symetralnych boków

czworokąta.
3) Nie w każdy czworokąt można wpisać okrąg i nie na każdym czworokącie można opisać okrąg. Zależy to od tego, czy dwusieczne wszystkich kątów wewnętrznych czworokąta przecinają się w jednym punkcie lub odpowiednio, czy symetralne wszystkich boków czworokąta przecinają się w jednym punkcie.

Zadania obowiązkowe

Zadanie 1. Jakie warunki musi spełniać równoległobok, aby można było a) opisać na nim okrąg, b) wpisać w niego okrąg?
Wskazówka: Wystarczy skorzystać odpowiednio z twierdzeń 2 i 1.

Szkic rozwiązania. a) Przeciwległe kąty w równoległoboku są równe. Na czworokącie można opisać okrąg, gdy sumy miar przeciwległych kątów są równe. Zatem na równoległoboku można opisać okrąg, gdy $2\alpha = 2\beta = 180°$ czyli gdy $\alpha = \beta = 90°$. Stąd równoległobok ten musi być prostokątem.
Na odwrót: Jeśli równoległobok jest prostokątem, to sumy miar przeciwległych kątów są równe, więc można na nim opisać okrąg.
b) Przeciwległe boki w równoległoboku są równej długości. W czworokąt można wpisać okrąg, gdy sumy długości przeciwległych boków sa równe. To znaczy, że w równoległobok można wpisać okrąg, gdy $2a = 2b$, tzn. $a = b$, a więc równoległobok jest rombem.
Na odwrót: Jeśli równoległobok jest rombem, to sumy długości przeciwległych boków są równe. Zatem można w niego wpisać okrąg.
Odpowiedź: a) Na równoległoboku można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy gdy jest on prostokątem. b) W równoległobok można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy gdy jest on rombem.

Zadanie 2. Uzasadnij, że trapez daje się wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy jest równoramienny.
Wskazówka: Korzystając z twierdzenia 2 pokazać, że zachodzą odpowiednie dwie implikacje.

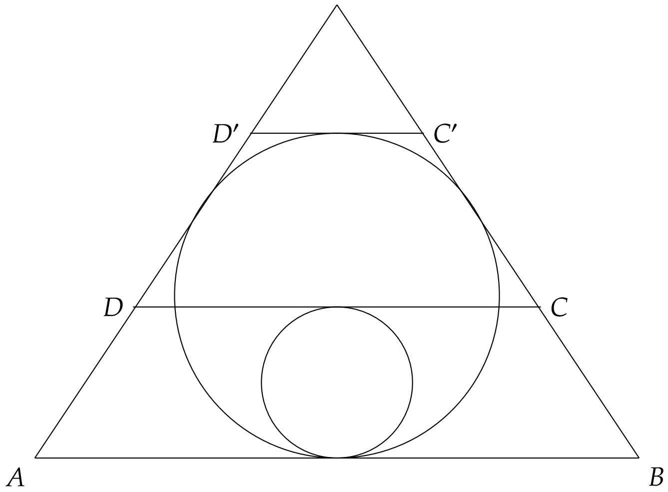
Szkic rozwiązania. 1) Pokażemy, że jeśli na trapezie można opisać okrąg, to trapez ten jest równoramienny. Załóżmy, że na trapezie można opisać okrąg. Wtedy $\beta + \delta = 180°$. Z drugiej strony, z równoległości podstaw AB i CD, mamy $\alpha + \delta = 180°$. Zatem $\alpha = \beta$, co oznacza, że trapez jest równoramienny.
2) Załóżmy, że trapez jest równoramienny. Pokażemy, że można opisać na nim okrąg. Z równoramienności trapezu wynika, że kąty przy podstawie są równe, tzn. $\alpha = \beta$. Jednocześnie $\alpha + \delta = 180°$, zatem $\beta + \delta = 180°$, a więc $\alpha + \gamma = 180°$.

Zadanie 3. Uzasadnij, że jeśli trapez jest równoramienny, przy czym długość ramienia trapezu jest równa średniej arytmetycznej długości jego podstaw, to można wpisać w niego okrąg.
Wskazówka: Zastosować twierdzenie 1.

Szkic rozwiązania. Jeśli ramię $c = \dfrac{a + b}{2}$, to znaczy że $c + c = a + b$, zatem w czworokąt ten można wpisać okrąg.

Uwagi metodologiczne. 1) Z zadania tego wynika, że tylko w niektóre trapezy równoramienne można wpisać okrąg (co widać wyraźnie, jeśli przedłużymy ramiona dowolnego trapezu równoramiennego do trójkąta i zauważymy, że okrąg wpisany w trapez musi być jednocześnie okręgiem wpisanym w tak powstały trójkąt, patrz rysunek poniżej).

2) Z zadania nie wynika, czy równoramienność jest warunkiem koniecznym wpisywalności okręgu w trapez (patrz zadanie 7).



Zadanie 4. Na kwadracie o boku długości a opisano okrąg. W jeden z otrzymanych odcinków kołowych wpisano kwadrat tak, że jeden z jego boków zawarty jest w boku kwadratu wyjściowego, a dwa pozostałe wierzchołki należą do okręgu, który jest brzegiem koła. Oblicz długość boku "nowego" kwadratu.
Wskazówka: Skorzystać z twierdzenia Pitagorasa

Szkic rozwiązania. Z warunków zadania wynika, że promień r okręgu wynosi $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Oznaczając przez x szukaną długość boku "nowego" kwadratu, z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.$$

Rozwiązując to równanie kwadratowe z niewiadomą x otrzymujemy: $\triangle = \frac{9}{4}a^2$, $x_1 = \frac{a}{5}$ lub $x_2 = -a$. Oczywiście odpowiedź drugą odrzucamy.
Odpowiedź: $x = \frac{a}{5}$.

Zadanie 5. Dane są przekątne rombu $|AC| = 8$ oraz $|BD| = 6$. Znajdź promień okręgu wpisanego w ten romb.
Wskazówka: Środek okręgu wpisanego w romb leży w punkcie przecięcia dwusiecznych jego kątów wewnętrznych (tu są to przekątne rombu). Skorzystać z własności prostopadłości i "dzielenia się" na połowy przekątnych w rombie.

Szkic rozwiązania. Przekątne w rombie przecinają się pod kątem prostym i dzielą na połowy. Zatem długość boku $|AB|$ rombu wynosi

$$|AB| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Przekątne w rombie są dwusiecznymi kątów wewnętrznych, zatem środek O okręgu wpisanego w romb $ABCD$ leży w punkcie przecięcia przekątnych tego rombu. Trójkat ABO jest prostokątny i jego wysokość r opuszczona z wierzchołka O jest równa promieniowi okręgu wpisanego. Porównamy pole trójkąta ABO wyrażone za pomocą wysokości r i OB

$$P_{ABO} = \frac{1}{2}|AB| \cdot r, \qquad P_{ABO} = \frac{1}{2}|AO| \cdot |OB| = \frac{1}{2}3 \cdot 4 = 6.$$

Stąd

$$r = \frac{12}{5} = 2,4.$$

Odpowiedź: $r = 2,4$

Zadanie 6. Oblicz pole trapezu $ABCD$, opisanego na okręgu o promieniu 5, w którym kąt przy wierzchołu A jest dwa razy większy od kąta przy wierzchołku B, a przekątna AC jest dwusieczną kąta przy wierzchołku A.
Wskazówka: Można pokazać, że obydwa trójkąty na jakie przekątna AC dzieli trapez $ABCD$ są równoboczne.

Szkic rozwiązania. Z twierdzenia 1 mamy

$$|AB| + |DC| = |BC| + |AD|. \tag{1}$$

Zachodzą równości pomiędzy miarami kątów:

$$\measuredangle CAB = \measuredangle ABC \quad \text{(z warunków zadania) oraz} \quad \measuredangle CAD = \measuredangle ACD \quad \text{(kąty naprzemianległe).}$$

Zatem trójkąty DAC i CAB są równoramienne i $|AD| = |DC|$, $|AC| = |CB|$. Stąd i z (1) mamy $|AB| = |BC|$, więc trójkąt ABC jest równoboczny, a kąt $\measuredangle ABC = 60°$. Zatem trapez ten jest rombem. Wysokość trapezu jest równa $2 \cdot 5 = 10$, stąd $\sin 60° = \frac{10}{|AD|}$, $|AD| = \frac{20}{\sqrt{3}}$. Ostatecznie pole

$$P = |AB| \cdot h = |AD| \cdot h = \frac{20}{\sqrt{3}} \cdot 10 = \frac{200\sqrt{3}}{3}$$

Odpowiedź: $P = \frac{200\sqrt{3}}{3}$

Zadania dodatkowe

Zadanie 7. W trapez prostokątny $ABCD$ o ramionach $|AD| = 12$ i $|BC| = 13$ wpisano okrąg. Znajdź podstawy trapezu.
Wskazówka: Wyznaczyć sumę oraz różnicę długości podstaw trapezu. Jedno z ramion trapezu jest jednocześnie jego wysokością.

Szkic rozwiązania. Z twierdzenia 1 mamy $|AB| + |DC| = 12 + 13 = 25$. Przyjmijmy, że bok AB jest dłuższy od boku CD. Oznaczmy przez x różnicę długości podstaw trapezu, $x = |AB| - |CD|$. Ponieważ trapez jest prostokątny, więc jego wysokość $h = |AD|$. Z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$x = \sqrt{(13)^2 - (12)^2} = \sqrt{(13-12)(13+12)} = \sqrt{25} = 5,$$

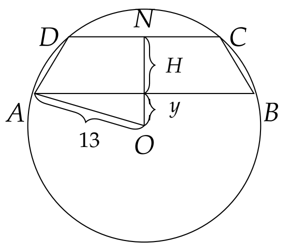
oczywiście $2|DC| + x = 25$, $2|DC| = 25 - 5 = 20$, $|DC| = 10$ i $|AB| = 10 + 5 = 15$.
Odpowiedź: $|AB| = 15$, $|CD| = 10$

Zadanie 8. W kwadrat wpisano koło, a następnie w to koło wpisano kwadrat. Różnica pól tych kwadratów wynosi 8 cm^2. Oblicz pole koła.
Wskazówka: Opisać promień koła i długość boku mniejszego kwadratu za pomocą długości boku większego kwadratu.

Szkic rozwiązania. Oznaczmy długość boku większego i mniejszego kwadratu odpowiednio przez a i b. Z twierdzenia Pitagorasa mamy $b^2 = \frac{a^2}{2}$. Ponieważ $b^2 = a^2 - 8$, stąd $a^2 = 16$, $a = 4$. Promień r okręgu wynosi $r = \frac{a}{2} = 2$. Zatem pole koła wynosi $P = \pi r^2 = 4\pi$.
Odpowiedź: $P = 4\pi$

Zadanie 9. Podstawy trapezu równoramiennego są równe $|AB| = 24$, $|CD| = 10$, a promień okręgu opisanego wynosi $R = 13$. Znajdź wysokość trapezu, gdy środek okręgu opisanego leży na zewnątrz trapezu.
Wskazówka: Z własności okręgu opisanego na czworokącie wynika, że środkiem tego okręgu jest punkt przecięcia się symetralnych jego boków. Zatem w przypadku trapezu równoramiennego, środek okręgu opisanego na nim leży na symetralnej jego podstaw.

Szkic rozwiązania. Oznaczmy środek okręgu opisanego przez O, jego rzut na odcinek CD przez N, wysokość trapezu przez H, a odległość punktu O od prostej AB przez y.



W trójkącie równoramiennym OAB, o długościach ramion $|OA| = |OB| = 13$ mamy:

$$y^2 = 13^2 - 12^2 = 25, \qquad y = 5.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ONC mamy

$$(H + 5)^2 + 5^2 = 13^2,$$

zatem

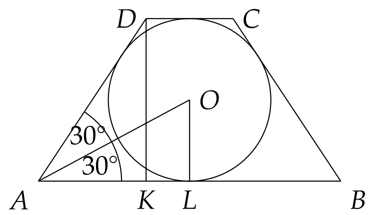
$$H = 12 - 5 = 7.$$

Odpowiedź: $H = 7$

Zadanie 10. W trapezie równoramiennym $ABCD$ kąt BAD jest równy $60°$, a odległość środka O okręgu wpisanego od wierzchołka A jest równa $|OA| = 2$. Znajdź boki trapezu.
Wskazówka: Środek okręgu wpisanego w trapez należy do dwusiecznej kąta BAD, a ponieważ

trapez jest równoramienny, więc środek tego okręgu należy jednocześnie do symetralnej podstaw trapezu.

Szkic rozwiązania. Niech DK będzie wysokością trapezu poprowadzoną z wierzchołka D. Niech O będzie środkiem okręgu wpisanego w trapez (punkt przecięcia dwusiecznych kątów trapezu), a L rzutem protopadłym punktu O na prostą AB.



Z trójkąta OAL mamy

$$\frac{|OL|}{2} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \qquad \text{zatem} \quad |OL| = 1,$$

$$\frac{\frac{1}{2}|AB|}{2} = \cos 30^\circ, \quad \text{zatem} \qquad |AB| = 4 \cdot \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}.$$

W trójkącie AKD mamy:

$$\frac{|AK|}{|DK|} = \operatorname{ctg} 60^\circ$$

$$|AK| = |DK|\tfrac{\sqrt{3}}{3} = 2|OL| \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{3} = \tfrac{2\sqrt{3}}{3}$$

oraz

$$\frac{|AK|}{|AD|} = \cos 60^\circ, \quad \text{zatem} \qquad |AD| = \frac{|AK|}{\cos 60^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

W trapez ten wpisano okrąg zatem $|AB| + |CD| = 2|AD| = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$, przy czym $|AB| = |CD| + 2|AK|$. Stąd

$$2|CD| + 2 \cdot \tfrac{2\sqrt{3}}{3} = 2 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$|CD| = \tfrac{1}{2}\left(\frac{8\sqrt{3}}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = \tfrac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Odpowiedź: $|AB| = 2\sqrt{3}$, $|CD| = \tfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $|AD| = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

Zadanie 11. Na stole ułożono cztery monety tak, że każda dotyka dwóch sąsiednich. Udowodnij, że środki tych monet są wierzchołkami czworokąta, w który można wpisać okrąg, a punkty styczności są wierzchołkami czworokąta, na którym można opisać okrąg.
Wskazówka: Pierwsza część zadania wynika wprost z twierdzenia 1. Dla dowodu drugiej części zadania wystarczy pokazać, że symetralne boków mniejszego czworokąta przecinają się w jednym punkcie (jako dwusieczne kątów wewnętrznych większego czworokąta).

Szkic rozwiązania. Oznaczmy środki tych monet przez A, B, C, D, ich promienie odpowiednio przez r_A, r_B, r_C, r_D. Ze styczności tych monet wynika, że

$$|AB| = r_A + r_B, \quad |CD| = r_C + r_D, \quad |AD| = r_A + r_D \quad |BC| = r_B + r_C.$$

Zatem

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$$

z twierdzenia 1 wynika, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.
Punkty styczności monet oznaczmy przez P, Q, R, S. Środek okręgu wpisanego w czworokąt $ABCD$ jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów czworokąta $ABCD$. Dwusieczne kątów wewnętrznych czworokąta $ABCD$ są symetralnymi boków czworokąta $PQRS$ (wynika to z równoramienności trójkątów). Zatem symetralne boków czworokąta $PQRS$ przecinają się w jednym punkcie, stąd można na tym czworokącie opisać okrąg.

Zadanie 12. Znajdź promień okręgu wpisanego w romb o polu $P = 840$, gdy dany jest stosunek długości przekątnych 21 : 20.
Wskazówka: Skorzystać ze wzorów na pole rombu wyrażone odpowiednio za pomocą jego przekątnych i za pomocą jego wysokości i podstawy.

Szkic rozwiązania. Oznaczmy długość boku rombu przez a, długości przekątnych przez d_1 i d_2, a promień okręgu wpisanego w romb przez r. Z warunków zadania mamy $\frac{d_1}{d_2} = \frac{21}{20}$ stąd $d_1 = \frac{21d_2}{20}$, a pole $P = 840$. Pole rombu można wyznaczyć za pomocą wzorów:

$$P = \frac{d_1 d_2}{2}, \qquad P = a \cdot h = 2ar.$$

Zatem

$$840 = \frac{\frac{21}{20}d_2^2}{2}, \qquad r = \frac{P}{2a},$$
$$d_2 = 40 \qquad d_1 = 42.$$

Długość a boku rombu wyznaczymy korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego utworzonego przez bok i przekątne rombu.

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = 20^2 + 21^2 = 841,$$
$$\text{stąd} \qquad a = 29.$$

Stąd

$$r = \frac{840}{2 \cdot 29} = \frac{420}{29}.$$

Odpowiedź: $r = \frac{420}{29}$

Zadanie 13. Podstawy trapezu równoramiennego $ABCD$ wynoszą $|AB| = 16$, $|CD| = 12$, a wysokość 14. Znaleźć promień R okręgu opisanego.
Wskazówka: Skorzystać z twierdzenia sinusów, patrz rozdział Twierdzenie sinusów i cosinusów.
Szkic rozwiązania. Skorzystamy z twierdzenia sinusów.

Jeśli przez DK oznaczymy wysokość trapezu opuszczoną z wierzchołka D na bok AB, to $|KA| = \frac{1}{2}(|AB| - |CD|) = 2$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta KAD

$$|AD| = \sqrt{|KA|^2 + |KD|^2} = \sqrt{2^2 + 14^2} = 10\sqrt{2}.$$

Okrąg opisany na trapezie $ABCD$ jest jednocześnie opisany na trójkącie ABD. Stąd dla jego średnicy $2R = \frac{|BD|}{\sin \measuredangle BAD}$. Jednocześnie z trójkąta AKD mamy

$$\sin \measuredangle BAD = \frac{|DK|}{|AD|} = \frac{14}{10\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

oraz $|BD| = 14\sqrt{2}$ (przekątna w kwadracie). Zatem

$$2R = \frac{14\sqrt{2}}{\frac{7\sqrt{2}}{10}} = 20.$$

Odpowiedź: $R = 10$

Zadanie 14. Środek okręgu o promieniu 13, opisanego na trapezie, jest oddalony od podstaw tego trapezu o 5 i 10. Obliczyć pole tego trapezu.
Wskazówka: Rozważyć przypadki, gdy środek leży wewnątrz i gdy leży na zewnątrz trapezu.
Szkic rozwiązania. Pierwszy przypadek: gdy środek okręgu leży wewnątrz trapezu.
Wtedy wysokość trapezu wynosi $5 + 10 = 15$
Promienie okręgu tworzą z podstawami a i b trapezu dwa trójkąty równoramienne o ramionach długości 13. Zatem z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$\left(\tfrac{a}{2}\right)^2 + 5^2 = 13^2, \qquad \left(\tfrac{b}{2}\right)^2 + 10^2 = 13^2,$$
$$a = 24, \quad b = 2\sqrt{69}.$$

Wówczas

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot 15 = 15(12 + \sqrt{69}).$$

Drugi przypadek: gdy środek okręgu leży na zewnątrz trapezu.
Wtedy wysokość trapezu jest równa $10 - 5 = 5$. Wówczas pole wynosi $P = 5(12 + \sqrt{69})$.
Odpowiedź: $P = 15(12 + \sqrt{69})$ lub $P = 5(12 + \sqrt{69})$

.

Zadanie 15. Na kole o promieniu długości r opisano trapez równoramienny o najmniejszym polu. Znaleźć jego kąty.
Wskazówka: Wyrazić pole trapezu za pomocą sinusa kąta leżącego przy podstawie trapezu.
Szkic rozwiązania. Oznaczmy kąt przy wierzchołku A jako α, oczywiście $\alpha \in (0, \pi)$, a długość ramienia trapezu przez c. Ponieważ suma długości podstaw trapezu wynosi $2c$, więc pole trapezu wynosi

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot 2r = \frac{4r^2}{\sin \alpha}.$$

Ponieważ $\alpha \in (0, \pi)$, zatem pole P przyjmuje najmniejszą wartość dla kąta $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Stąd trapezem o minimalnym polu opisanym na okręgu jest kwadrat.
Odpowiedź: $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \dfrac{\pi}{2}$

Zadania domowe

Zadanie 16. Kwadrat $ABCD$ wpisano w okrąg o promieniu $R > 0$. Wykazać, że dla dowolnego punktu M, leżącego na okręgu, zachodzi równość: $|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 + |MD|^2 = 8R^2$.
Wskazówka: Rozważyć dwa trójkąty prostokątne o wierzchołku $M \neq A, B, C, D$, wsparte na średnicach okręgu wyznaczonych przez wierzchołki kwadratu. Jeśli $M = A$ lub $M = B$ lub $M = C$ lub $M = D$ rozpartujemy jeden trójkąt i dodatkowo średnicę.

Zadanie 17. Uzasadnij, że jeśli środkiem okręgu, opisanego na pewnym czworokącie, jest punkt przecięcia przekątnych, to czworokąt ten jest prostokątem.
Wskazówka: Kąty wewnętrzne tego czworokąta są proste, jako wsparte na średnicy okręgu.

Zadanie 18. Podstawy trapezu równoramiennego są równe $|AB| = 24$, $|CD| = 10$, promień okręgu opisanego wynosi $R = 13$. Znajdź wysokość trapezu wiedząc, że środek okręgu opisanego leży wewnątrz trapezu.
Wskazówka: Z własności okręgu opisanego na czworokącie wynika, że środek tego okręgu leży w punkcie przecięcia symetralnych jego boków. Zatem w przypadku trapezu równoramiennego, środek okręgu opisanego należy do symetralnej jego podstaw.
Odpowiedź: $H = 17$

Zadanie 19. Na okręgu opisano trapez równoramienny $ABCD$. Oblicz stosunek długości ramienia tego trapezu do jego obwodu.
Wskazówka: Skorzystać z twierdzenia 1.
Odpowiedź: $k = \frac{1}{4}$

Zadanie 20. Znajdź promień okręgu wpisanego w trapez równoramienny $ABCD$ o podstawach $|AB| = 8$ i $|CD| = 2$.
Wskazówka: Skorzystać z twierdzenia 1.
Odpowiedź: $r = 2$

Zadanie 21. Znajdź promień okręgu wpisanego w trapez równoramienny o obwodzie $L = 16$ oraz kącie ostrym $30°$.
Wskazówka: Skorzystać z twierdzenia 1.
Odpowiedź: $r = 1$

Zadanie 22. W trapezie równoramiennym $ABCD$ kąt ADC wynosi $120°$, a odległość wierzchołka D od środka okręgu wpisanego jest równa $|OD| = 2\sqrt{3}$. Znajdź długości boków trapezu.
Wskazówka: Odcinek OD leży na dwusiecznej kąta ADC. Punkt O leży na symetralnej podstaw trapezu.
Odpowiedź: $|AB| = 6\sqrt{3}$, $|CD| = 2\sqrt{3}$, $|BC| = |AD| = 4\sqrt{3}$

Literatura

(a) E. Bańkowska, A. Cewe, D. Stankiewicz, Egzamin wstępny na wyższe uczelnie. Zbiór zadań, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk 2000.
(b) T. Karolak, Repetytorium z matematyki, Wydawnictwo Skrypt, Warszawa 2004.
(c) K. Kłaczkow, M. Kurczab, E. Świda, Matematyka dla licealistów. Podręcznik do II klasy, Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro, Warszawa 2000,
(d) J. Uryga, Nowa matura. Matematyka, ParkEdukacja Nauka bez tajemnic, Warszawa 2008,
(e) A. Zakrzewska, E. Stachowski, M. Szurek, I ty zostaniesz Pitagorasem. Podręcznik do matematyki do klasy drugiej liceum i technikum. Zakres rozszerzony i zakres podstawowy. Oficyna Wydawniczo-Poligraficzna "ADAM", Warszawa 2003,
(f) D. i M. Zakrzewscy, Repetytorium z matematyki dla uczniów szkół średnich i kandydatów na studia. Wydawnictwo Szkolne PWN, Warszawa 2000.