Wielomiany

dr Tadeusz Werbiński

Teoria

Na początku przypomnimy kilka szkolnych definicji i twierdzeń dotyczących wielomianów. Autorzy podręczników szkolnych podają różne definicje wielomianu - dla jednych wielomian, to funkcja ; dla drugich wielomian, to suma jednomianów, a jeszcze dla innych wielomian jest wyrażeniem algebraicznym. Na wykładzie z algebry usłyszycie Państwo, że wielomianem nazywamy ciąg nieskończony o prawie wszystkich wyrazach równych zero, a dodawanie i mnożenie wielomianów będzie określone jako dodawanie i mnożenie ciągów. Takie podejście okaże się naturalnym, bo przecież dodając lub mnożąc wielomiany, wykonujemy te operacje na współczynnikach tych wielomianów. Podobnie przy mnożeniu wielomianu przez liczbę.

Definicja 1. Funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, gdzie $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi i $a_n \neq 0$, nazywamy wielomianem stopnia n jednej zmiennej rzeczywistej x. Liczby $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ nazywamy współczynnikami wielomianu f, współczynnik a_0 nazywamy wyrazem wolnym. Stopień wielomianu f oznaczamy $st(f)$ lub $deg(f)$. Wielomianem zerowym nazywamy funkcję $f(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Przyjmujemy dodatkowo, że stopień wielomianu zerowego jest równy $-\infty$.

Wielomiany stopnia zero nazywamy wielomianami stałymi; wielomiany stopnia pierwszego, drugiego nazywamy odpowiednio liniowymi (funkcje liniowe) lub kwadratowymi (funkcje kwadratowe). Zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych zmiennej rzeczywistej x oznaczamy przez $\mathbb{R}[x]$.
Dwa wielomiany f i g są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i ich współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej x są równe. Wobec tego wielomian
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ jest wielomianem zerowym, gdy $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$.
Suma i iloczyn wielomianów jest wielomianem i jeśli $st(f) = m$, $st(g) = n$, to $st(f+g) \leqslant max(m,n)$ oraz $st(f \cdot g) = m + n$.
Niech $c \in \mathbb{R}$. Liczbę $f(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \ldots + a_1 c + a_0$ nazywamy wartością wielomianu f w punkcie c.

Twierdzenie 1. *Niech f i g będą wielomianami o współczynnikach rzeczywistych, przy czym g nie jest wielomianem zerowym. Istnieją wtedy jednoznacznie wyznaczone wielomiany q i r o współczynnikach rzeczywistych takie, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ spełnione są warunki:*
(a) $f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$,
(b) stopień wielomianu r jest mniejszy od stopnia wielomianu g.

Wielomian q nazywamy ilorazem, a r resztą z dzielenia wielomianu f przez g. Jeśli r jest wielomianem zerowym, to wielomian f jest podzielny przez wielomian g. Łatwo zauważyć, że reszta z dzielenia wielomianu f przez dwumian $(x - c)$ jest równa $f(c)$.

Przykład 1. Wykonaj dzielenie wielomianu $f(x) = x^4 - x^3 - 34x^2 + 57x - 21$ przez wielomian $g(x) = x^2 - 6x + 3$.
Rozwiązanie: Mamy

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x^2 & +5x & -7 & & & & & & \\
\hline
(x^4 & -x^3 & -34x^2 & +57x & -21) & : & (x^2 & -6x & +3) \\
-x^4 & +6x^3 & -3x^2 & & & & & & \\
\hline
 & 5x^3 & -37x^2 & +57x & -21 & & & & \\
 & -5x^3 & +30x^2 & -15x & & & & & \\
\hline
 & & -7x^2 & +42x & -21 & & & & \\
 & & 7x^2 & -42x & +21 & & & & \\
\hline
 & & & & 0 & & & &
\end{array}
$$

W tym przypadku reszta z dzielenia wielomianu f przez wielomian g jest równa zero (jest wielomianem zerowym), a więc wielomian f jest podzielny przez wielomian g. Mamy więc równość:

$$x^4 - x^3 - 34x^2 + 57x - 21 = (x^2 - 6x + 3)(x^2 + 5x - 7).$$

Na początku XIX wieku angielski matematyk W.G. Horner podał algorytm służący do wyznaczania ilorazu i reszty z dzielenia wielomianu przez dwumian $(x - a)$. Algorytm ten nazywa się często **schematem Hornera**.

Lemat 1. *(**schemat Hornera**) Niech $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych i niech $a \in \mathbb{R}$. Niech $g(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0$ będzie ilorazem z dzielenia wielomianu f przez dwumian $(x - a)$. Wtedy współczynniki wielomianu g spełniają zależności:*
$b_{n-1} = a_n$, $b_k = a_{k+1} + a \cdot b_{k+1}$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n-2$, a reszta jest równa $r = a_0 + a \cdot b_0$.

Definicja 2. Liczba rzeczywista a jest pierwiastkiem wielomianu f wtedy i tylko wtedy, gdy $f(a) = 0$.

Pierwiastek wielomianu f stopnia n jest więc rozwiązaniem równania wielomianowego

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0\ .$$

Dla $n = 2$ otrzymujemy funkcję kwadratową (trójmian kwadratowy) postaci

$$f(x) = ax^2 + bx + c\ \ ,\ \ a \neq 0.$$

Liczbę $\Delta = b^2 - 4ac$ nazywamy wyróznikiem trójmianu kwadratowego.

(a) Jeśli $\Delta < 0$, to trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków rzeczywistych.

(b) Jeśli $\Delta > 0$, to trójmian kwadratowy ma dwa **rne** pierwiastki rzeczywiste określone wzorami

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\ \ ,\ \ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\ .$$

Mamy wtedy $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Jest to tzw. postać iloczynowa trójmianu kwadratowego.

(c) Jeśli $\Delta = 0$, to trójmian kwadratowy ma pierwiastek dwukrotny (podwójny) dany wzorem

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a}\ .$$

Mamy wtedy $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

Np. dla trójmianu kwadratowego $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$ mamy $\Delta = 25$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 3$ oraz $2x^2 - 7x + 3 = 2(x - \frac{1}{2})(x - 3)$.
Przy rozwiązywaniu równań i nierówności kwadratowych przydatne są tzw. wzory Viete'a.

Lemat 2. *Jeśli $\Delta \geqslant 0$ i x_1 , x_2 są pierwiastkami równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$, to prawdziwe są równości*

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \ , \ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \ .$$

Definicja 3. Niech $k \in \mathbb{N}$. Liczba rzeczywista a jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu f wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian f jest podzielny przez $(x-a)^k$ i nie jest podzielny przez $(x-a)^{k+1}$.

Np.dla wielomianu $f(x) = (x + 2)^3(x - 5)^2(x^2 + 7)$ liczba -2 jest trzykrotnym pierwiastkiem, a liczba 5 jest dwukrotnym pierwiastkiem.

Twierdzenie 2. *(Bezoute'a) Liczba rzeczywista a jest pierwiastkiem wielomianu f wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian f jest podzielny przez dwumian $(x - a)$, tzn. $f(x) = (x - a) \cdot g(x)$.*

Dowód: ($\Rightarrow$) Załóżmy, że liczba a jest pierwiastkiem wielomianu f. Wtedy $f(a) = 0$. Na mocy wcześniejszego twierdzenia istnieją wielomiany g i r, takie że

$$f(x) = (x - a) \cdot g(x) + r(x),$$

gdzie $st(r) = 0$ lub $r(x) = 0$, tzn. r jest wielomianem stałym (liczbą rzeczywistą) lub wielomianem zerowym. Otrzymujemy stąd
$0 = f(a) = (a - a) \cdot g(a) + r(a)$. Zatem $r = 0$, co oznacza, że $(x - a)$ jest dzielnikiem f.
($\Leftarrow$) Zakładamy teraz, że wielomian f jest podzielny przez dwumian $(x - a)$. Istnieje więc taki wielomian q, że $f(x) = (x - a) \cdot q(x)$. Stąd $f(a) = (a - a) \cdot q(a) = 0 \cdot q(a) = 0$, więc liczba $a \in \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem wielomianu f .

Niech f będzie wielomianem o **współczynnikach całkowitych.** Wszystkie pierwiastki tego wielomianu, które są liczbami całkowitymi lub liczbami wymiernymi, możemy łatwo wyznaczyć, korzystając z poniższego lematu.

Lemat 3. *Niech $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych takim, że $a_n \neq 0$ i $a_0 \neq 0$. Wówczas,*

(a) jeśli liczba całkowita c jest pierwiastkiem wielomianu f,to c jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 ;
(b) jeśli ułamek nieskracalny $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ jest pierwiastkiem wielomianu f, to p jest dzielnikiem a_0 i q jest dzielnikiem a_n.

Lemat 4. *Niech $n \in \mathbb{N}$. Wielomian n-tego stopnia o współczynnikach rzeczywistych ma co najwyżej n pierwiastków.*

Na zakończenie warto przytoczyć twierdzenie o rozkładzie dowolnego wielomianu o współczynnikach rzeczywistych na iloczyn wielomianów stopnia co najwyżej drugiego.

Lemat 5. *Każdy wielomian f o współczynnikach rzeczywistych stopnia n można zapisać w postaci*

$$f(x) = c(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_s)(x^2 + a_1 x + b_1) \cdot \ldots \cdot (x^2 + a_t x + b_t) \ ,$$

gdzie $c, x_1, \ldots, x_s, a_1, \ldots, a_t, b_1, \ldots, b_t \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ oraz $n = s + 2t$, a wielomiany $x^2 + a_i x + b_i$, $i = 1, 2, \ldots, t$, nie mają pierwiastków rzeczywistych.

Zadania na zajęcia

Zadanie 1. Wyznacz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu $f(x) = x^4 + 4x^3 + x^2 + 2x + 3$ przez wielomian $g(x) = x^2 + x - 1$.

Zadanie 2. Nie wykonując dzielenia, oblicz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu f przez dwumian g, jeśli $f(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 3x - 20$, $g(x) = x + 2$.

Zadanie 3. Reszta z dzielenia wielomianu f przez dwumian $(x+4)$ jest równa 4 , a przy dzieleniu przez $(x - 2)$ jest równa -2 . Oblicz resztę z dzielenia wielomianu f przez trójmian kwadratowy $(x^2 + 2x - 8)$.

Zadanie 4. Wyznacz całkowite wartości parametru a , dla których wielomian
$f(x) = x^3 + ax^2 - a^2x + 1$ ma dwa różne pierwiastki całkowite.

Zadanie 5. Rozwiąż równanie: $x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8 = 0$.

Zadanie 6. Rozwiąż równanie: $x^6 + 2x^4 - 31x^2 + 28 = 0$.

Zadanie 7. Rozwiąż nierówność: $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 < 0$.

Zadanie 8. Rozwiąż nierówność: $(1 - 2x)^3(3x + 2)^2(x - \frac{1}{2}) \geqslant 0$.

Zadanie 9. Dla jakich wartości parametru m pierwiastki x_1 i x_2 równania

$$\frac{mx}{m-1} + \frac{m+1}{x} = x + 1$$

spełniają nierówność: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 2m + 1$?

Uwaga 1. Jeśli tego typu zadania były (będą) rozwiązywane w temacie "Funkcja kwadratowa",to zadanie to należy pominąć.

Zadanie 10. Wyznacz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 4x - 5$ przez wielomian $g(x) = x^2 + 3x - 2$.

Zadanie 11. Rozwiąż równanie: $16x^4 - 24x^3 - 2x + 3 = 0$.

Zadanie 12. Rozwiąż równanie: $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = 0$.

Zadanie 13. Rozwiąż równanie: $x^{13} - x^{12} - x^7 + x^6 = 0$.

Zadanie 14. Rozwiąż nierówność: $2x^3 - 5x^2 - 2x + 5 > 0$.

Zadanie 15. Rozwiąż nierówność: $(12x^3 - 16x^2 + 7x - 1)^{10}(-10x^2 + 3x + 1)^5 > 0$.

Zadania domowe

Zadanie 16. Dla jakich wartości parametru m równanie

$$(m+1)x^2 - 4mx + m + 1 = 0$$

ma dwa różne pierwiastki dodatnie ?

Zadanie 17. Wyznaczyć takie liczby a i b , aby wielomian $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 + ax + b$ był podzielny przez dwumian $(x^2 - 1)$.

Zadanie 18. Rozwiąż równanie: $x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 12x + 9 = 0$.

Zadanie 19. Rozwiąż nierówność: $(x-4)(x^2+5x-6)(-x^2+2x+1) < 0$.

Zadanie 20. Rozwiąż nierówność: $-x^4 + 5x^3 - 5x^2 - x + 2 \geqslant 0$.

Odpowiedzi:

1.12. $q(x) = x^2 + 3x - 1$, $r(x) = 6x + 2$
1.14. $q(x) = x^3 - 6x^2 + 5x - 7$ oraz $r = -6$.
1.15. $r(x) = -x$.
1.16. $a = -1$.
1.17. $x_1 = 1$ *i* $x_2 = 2$ - pierwiastek trzykrotny .
1.18. $x \in \{\pm 1, \pm 2\}$.
1.19. $x \in (-3, -1) \cup (1, 2)$.
1.20. $x \in \{-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\}$.
1.21. $m \in \left(-\frac{3}{2}\ ,\ -1\right) \cup (0\ ,\ 1)$.
1.23. $q(x) = 2x^2 - 3x + 12$, $r(x) = -38x + 19$.
1.24. $x = \frac{1}{2}$ lub $x = \frac{3}{2}$.
1.25. $x = -1$ lub $x = -2$.
1.26. $x = 0$-sześciokrotny ; $x = 1$-dwukrotny ; $x = -1$.
1.27. $x \in (-1, 1) \cup (\frac{5}{2}; +\infty)$.
1.28. $x \in (-\frac{1}{5}; \frac{1}{2}) \backslash \{\frac{1}{3}\}$.
1.29. $m \in (-\infty\ ,\ -1) \cup (1\ ,\ \infty)$.
1.30. $a = 3$, $b = -7$.
1.31. $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = -3 - 2\sqrt{3}$, $x_4 = -3 + 2\sqrt{3}$.
1.32. $x \in (-6, 1 - \sqrt{2}) \cup (1, 1 + \sqrt{2}) \cup (4, +\infty))$.
1.33. $x \in [\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}]$.

Literatura

(a) A. Zalewska, E. Stachowski, M. Szurek, I ty zostaniesz Euklidesem, Podręcznik do matematyki dla klasy I, II, III liceum i technikum, Oficyna Wydawniczo-Poligraficzna "ADAM", Warszawa 2004.
(b) A. Zalewska, E. Stachowski, I ty zostaniesz Euklidesem, Zbiór zadań z matematyki dla klas I, II, III liceum i technikum, Oficyna Wydawniczo-Poligraficzna "ADAM", Warszawa 2004.
(c) B. Gdowski, E. Pluciński, Zbiór zadań z matematyki dla kandydatów na wyższe uczelnie, WNT, Warszawa 1979.
(d) N. Dróbka, K. Szymański, Zbiór zadań z algebry dla klasy I i II liceum ogólnokształcącego, WSiP, Warszawa 1971.

(e) N. Dróbka, K. Szymański, Zbiór zadań z matematyki dla klasy III i IV liceum ogólnokształcącego, PZWS, Warszawa 1973.
(f) R. Pawlak, A.Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żylak, Matematyka krok po kroku, Nowa matura, Zbiór zadań cz.I, RES POLONA, Łódź 2004.
(g) R. Pawlak, A.Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żylak, Matematyka krok po kroku, Nowa matura, Zbiór zadań cz.II, RES POLONA, Łódź 2004.
(h) A. Ciszkowska, A. Przychoda, Z. Łaszczyk, Matematyka, Zbiór zadań dla liceum i technikum klasy 1-3, WSiP, Warszawa 2010.