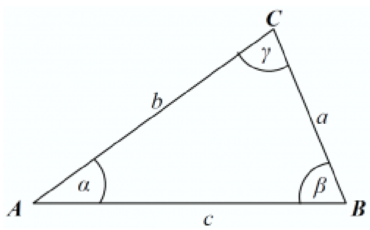
Twierdzenie sinusów i cosinusów

Aldona Dutkiewicz
Aneta Sikorska-Nowak

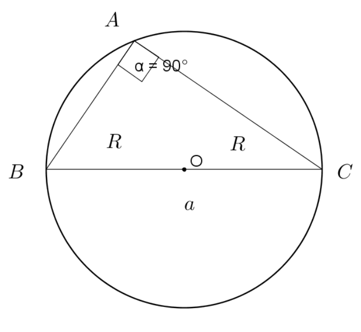
Teoria

Twierdzenie 1. *Twierdzenie sinusów (twierdzenie Snelliusa).*
W dowolnym trójkącie stosunek długości dowolnego boku do sinusa kąta leżącego naprzeciw tego boku jest stały i równy długości średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.



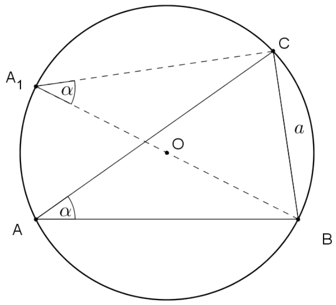
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Dowód tego twierdzenia przeprowadzimy, uzasadniając, że $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$.
Rozpatrzymy trzy przypadki.
Przypadek I: α jest kątem prostym.
Przypadek II: α jest kątem ostrym.
Przypadek III: α jest kątem rozwartym.
Przypadek I:



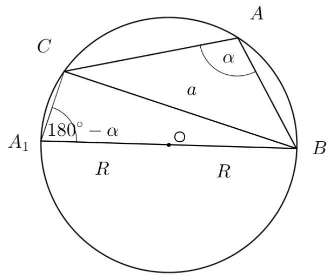
1. α jest kątem prostym, z założenia,
2. BC jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC, stąd $|BC| = 2R$,
3. $a = 2R$,
4. $\sin\alpha = \sin 90° = 1$, zatem $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, c.n.d.

Przypadek II:



Poprowadźmy średnicę A_1B i zauważmy, że:
1. $|\measuredangle BAC| = |\measuredangle BA_1C| = \alpha$, jako kąty wpisane w koło oparte na tym samym łuku;
2. $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$, z określenia sinusa kąta α, zatem $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$ c.n.d.

Przypadek III:



Poprowadźmy średnicę A_1B i zauważmy, że:
1. $|\measuredangle A_1CB|$ jest prosty, jako kąt wpisany w koło oparty na półokręgu,
2. $|\measuredangle CA_1B| = 180° - \alpha$, jako kąt wpisany w koło oparty na łuku CAB dopełniającym łuk CA_1B do okręgu,
3. ΔA_1BC jest prostokątny o przeciwprostokątnej A_1B i $|A_1B| = 2R$,
4. $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha) = \frac{a}{2R}$, zatem $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$ c.n.d.

Udowodniliśmy zatem, że niezależnie od tego, czy α jest kątem ostrym, prostym, czy rozwartym, to $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$.
Tak samo przeprowadza się dowody równości $\frac{b}{\sin\beta} = 2R$ oraz $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

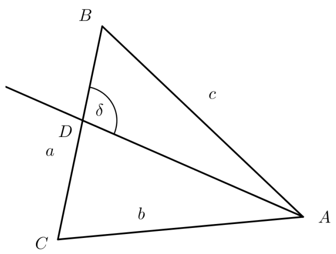
Przykład 1. Obliczmy długość promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC, zakładając, że $a = 4\sqrt{7}$ i $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{3}$.
Możemy skorzystać z twierdzenia sinusów, ale wcześniej należy obliczyć $\sin\alpha$. Ze wzoru jedynkowego otrzymujemy:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - (-\frac{\sqrt{2}}{3})^2 = \frac{7}{9}, \quad \text{skąd}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3} \vee \sin\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Ponieważ α jest kątem trójkąta, to $\alpha \in (0, \pi)$, zatem $\sin\alpha > 0$, więc musi być $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$. Korzystając teraz z twierdzenia sinusów, obliczamy, że $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, skąd $R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{4\sqrt{7}}{\frac{2\sqrt{7}}{3}} = 6$.
Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC ma długość 6.

Przykład 2. Z wierzchołka A trójkąta ABC, którego boki mają długość a, b i c, poprowadzono półprostą przecinającą bok BC w punkcie D. Podzieliła ona dany trójkąt na dwa trójkąty. Wykażemy, że stosunek promieni okręgów opisanych na obu tych trójkątach nie zależy od kąta, jaki tworzy ta półprosta z bokiem BC.



Oznaczmy $|\measuredangle ADB| = \delta$. R_1-promień okręgu opisanego na trójkącie ABD, R_2- promień okręgu opisanego na trójkącie ADC. Z twierdzenia sinusów dla trójkąta ABD mamy: $R_1 = \frac{c}{2\sin\delta}$. Zauważmy dalej, że $|\measuredangle ADC| = 180° - \delta$ (jest to kąt przyległy do kąta ADB). Stosując twierdzenie sinusów dla trójkąta ADC, dochodzimy do wniosku, że

$$R_2 = \frac{b}{2\sin(180° - \delta)} = \frac{b}{2\sin\delta}. \text{ Zatem } \frac{R_1}{R_2} = \frac{\frac{c}{2\sin\delta}}{\frac{b}{2\sin\delta}} = \frac{c}{b},$$

a więc stosunek ten zależy tylko od długości boków b i c.

Przykład 3. Wykażmy, że jeżeli α, β są miarami kątów trójkąta, to $\sin(\alpha+\beta) < \sin\alpha + \sin\beta$.
Z twierdzenia sinusów mamy:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R, \quad \frac{b}{\sin\beta} = 2R \text{ oraz } \frac{c}{\sin[180° - (\alpha+\beta)]} = \frac{c}{\sin(\alpha+\beta)} = 2R, \text{ skąd}$$

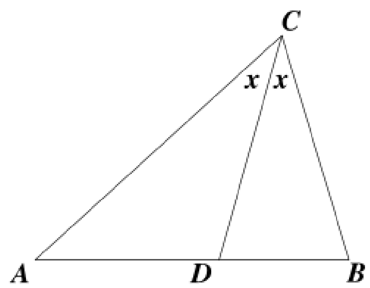
$$\sin\alpha = \frac{a}{2R}, \quad \sin\beta = \frac{b}{2R} \text{ oraz } \sin(\alpha+\beta) = \frac{c}{2R}.$$

Mamy zatem:

$$\sin(\alpha+\beta) < \sin\alpha + \sin\beta \Leftrightarrow \frac{c}{2R} < \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} \Leftrightarrow c < a + b.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa w każdym trójkącie, gdyż zawsze suma długości dwóch boków jest większa od długości boku trzeciego. Zatem również prawdziwa jest równoważna jej nierówność, występująca w tezie, co kończy dowód.

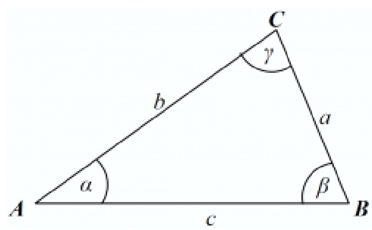
Korzystając z twierdzenia sinusów łatwo udowodnić twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie:



Twierdzenie 2. *Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie.*
Dwusieczna kąta wewnętrznego w trójkącie dzieli przeciwległy bok proporcjonalnie do długości pozostałych boków.

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

Twierdzenie 3. *Twierdzenie cosinusów (twierdzenie Carnota).*
W dowolnym trójkącie kwadrat długości dowolnego boku jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków, pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

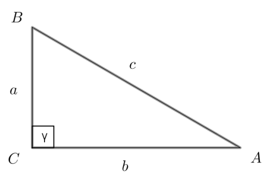
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Uwaga 1. W szczególnym przypadku, gdy trójkąt jest prostokątny i γ jest kątem prostym, twierdzenie to sprowadza się do twierdzenia Pitagorasa, ponieważ cosinus kąta prostego jest równy zero, czyli

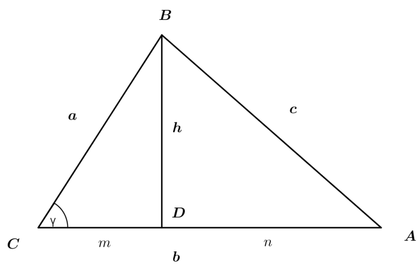
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Dowód.
Przypadek I: γ jest kątem prostym.



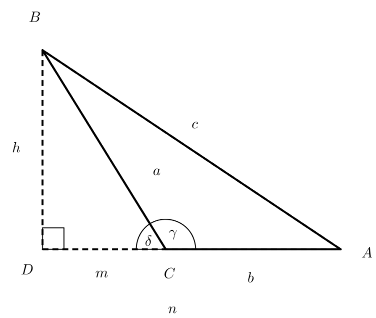
Twierdzenie cosinusów to uogólnienie twierdzenia Pitagorasa dla dowolnego trójkąta. Jeżeli kąt γ jest prosty, to $\cos\gamma = 0$ i $c^2 = a^2 + b^2$.

Przypadek II - γ jest kątem ostrym.



Przyjmujemy oznaczenia jak na powyższym rysunku.
Mamy kolejno:
1. Punkt D jest spodkiem wysokości BD trójkąta ABC i $|BD| = h$,
2. Korzystając z zależności w trójkącie prostokątnym CDB, obliczamy: $\sin\gamma = \frac{h}{a}$, stąd $h = a\sin\gamma$, $\cos\gamma = \frac{m}{a}$, zatem $m = a\cos\gamma$ i $n = |b - m| = |b - a\cos\gamma|$.
3. Boki trójkąta prostokątnego ABD mają długości: c, $a\sin\gamma$, $|b - a\cos\gamma|$.
Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego ADB otrzymujemy:
$c^2 = (a\sin\gamma)^2 + (b - a\cos\gamma)^2$, stąd
$c^2 = a^2\sin^2\gamma + b^2 - 2ab\cos\gamma + a^2\cos^2\gamma = a^2(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) + b^2 - 2ab\cos\gamma$ i ostatecznie $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, c.n.d.

Przypadek III -γ jest kątem rozwartym.



Oznaczenia jak na poniższym rysunku.
Mamy kolejno:
1. Punkt D (spodek wysokości BD) należy do przedłużenia boku AC, $|BD| = h$.
2. W trójkącie prostokątnym CBD kąt δ jest równy $180° - \gamma$, wobec tego $\sin(180° - \gamma) = \frac{h}{a}$; ponieważ $\sin(180° - \gamma) = \sin\gamma$, to $h = a\sin\gamma$, $\cos(180° - \gamma) = \frac{m}{a}$; ponieważ $\cos(180° - \gamma) = -\cos\gamma$, to $m = -acos\gamma$, stąd otrzymujemy $n = m + b = b - a\cos\gamma$.

3. Boki trójkąta prostokątnego ABD mają długości: c, $a\sin\gamma$, $b - a\cos\gamma$.
Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego ABD, otrzymujemy:
$c^2 = (a\sin\gamma)^2 + (b - a\cos\gamma)^2$, stąd
$c^2 = a^2\sin^2\gamma + b^2 - 2ab\cos\gamma + a^2\cos^2\gamma = a^2(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) + b^2 - 2ab\cos\gamma$
i ostatecznie $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, c.n.d.

Zatem, niezależnie od tego, czy γ jest kątem ostrym, prostym, czy rozwartym, to $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Z twierdzenia cosinusów wynika, że jeżeli znamy długości wszystkich boków trójkąta, to możemy obliczyć cosinusy wszystkich jego kątów. I tak

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Zauważmy też, że jeżeli liczby a, b, c są długościami boków trójkąta i $a \leqslant b \leqslant c$, to miary kątów trójkąta spełniają warunek $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$ i
jeżeli $\cos\gamma > 0$, to trójkąt jest ostrokątny,
jeżeli $\cos\gamma = 0$, to trójkąt jest prostokątny,
jeżeli $\cos\gamma < 0$, to trójkąt jest rozwartokątny.

Przykład 4. W trójkącie dane są długości boków: $a = 5$, $b = 4$ oraz $\gamma = 150°$. Obliczmy długość trzeciego boku tego trójkąta i długość promienia opisanego na nim okręgu. Z twierdzenia cosinusów wynika, że $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 150°$. Ponieważ $\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, otrzymujemy:

$$c^2 = 41 + 21\sqrt{3}, \quad \text{skąd}$$

$$c = \sqrt{41 + 20\sqrt{3}}.$$

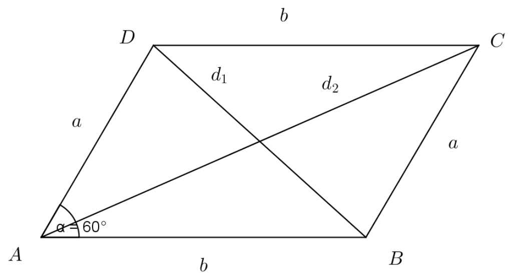
Skorzystamy teraz z twierdzenia sinusów: $\frac{c}{\sin 150°} = 2R$, a ponieważ $\sin 150° = \frac{1}{2}$, więc $R = c$.

Przykład 5. Dany jest trójkąt o bokach długości $a = 4$, $b = 5$, $c = 7$. Czy jest to trójkąt ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny?
Gdyby trójkąt ten był prostokątny (ewentualnie rozwartokątny), to kąt prosty (rozwarty) musiałby leżeć naprzeciwko najdłuższego boku. Wystarczy zatem rozważyć kąt leżący naprzeciwko boku długości c. Możemy to zrobić, korzystając z wniosku z twierdzenia cosinusów:

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -\frac{1}{5},$$

a skoro $\cos\gamma < 0$ i $\gamma \in (0, 180°)$, to kąt γ jest rozwarty. Zatem jest to trójkąt rozwartokątny.

Przykład 6. W równoległoboku kąt ostry ma miarę 60°, a stosunek kwadratu długości krótszej przekątnej do kwadratu długości dłuższej przekątnej wynosi 19 : 39. Obliczymy stosunek długości boków równoległoboku.



Oznaczmy przez a i b długości krótszego i dłuższego boku równoległoboku, zaś przez d_1 i d_2 - odpowiednio długości jego krótszej i dłuższej przekątnej. Po zastosowaniu twierdzenia cosinusów do trójkąta ABD otrzymujemy:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 60^\circ = a^2 + b^2 - ab.$$

Podobnie, z trójkąta ABC ($|\measuredangle ABC| = 120^\circ$) na mocy twierdzenia cosinusów:

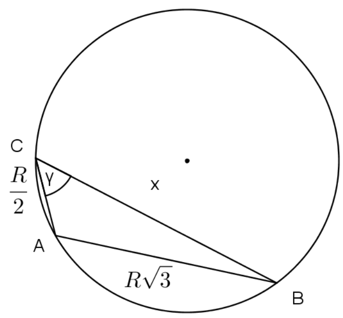
$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 120^\circ = a^2 + b^2 + ab.$$

Zatem z warunków zadania:

$$\frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{a^2 + b^2 - ab}{a^2 + b^2 + ab} = \frac{19}{39}.$$

Poszukujemy stosunku $\frac{a}{b}$ (lub $\frac{b}{a}$, co na jedno wychodzi). Aby go policzyć, podzielmy licznik i mianownik lewej strony naszego równania przez b^2. Otrzymujemy: $\frac{(\frac{a}{b})^2+1-\frac{a}{b}}{(\frac{a}{b})^2+1+\frac{a}{b}} = \frac{19}{39}$. Oznaczmy teraz $t = \frac{a}{b}$. Ostatnie równanie przyjmuje postać $\frac{t^2-t+1}{t^2+t+1} = \frac{19}{39}$, skąd $10t^2 - 29t + 10 = 0$, zatem $\Delta = 441$, $\sqrt{\Delta} = 21$; $t = \frac{2}{5} \vee t = \frac{5}{2}$. Ponieważ $a < b$, więc $t < 1$, zatem drugie rozwiązanie odrzucamy.
Szukany stosunek boków wynosi $\frac{2}{5}$.

Przykład 7. Trzy cięciwy okręgu o promieniu długości R tworzą trójkąt wpisany w ten okrąg. Długości dwóch tych cięciw wynoszą $\frac{R}{2}$ i $R\sqrt{3}$. Wyznaczymy długość trzeciej cięciwy.



Oznaczmy długość szukanej cięciwy BC przez x. Zauważmy, że (z twierdzenia sinusów) $\frac{|AB|}{\sin\gamma} = 2R$, skąd wobec faktu, że $|AB| = R\sqrt{3}$, otrzymujemy $\frac{R\sqrt{3}}{\sin\gamma} = 2R$, a więc $\sin\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ponieważ γ jest kątem trójkąta, więc ostatnia równość może zachodzić dla $\gamma = 60°$ lub $\gamma = 120°$. Rozważmy zatem dwa przypadki:
Na mocy twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC:
1) $\gamma = 60°$

$$(R\sqrt{3})^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + x^2 - 2\cdot x\cdot\frac{R}{2}\cdot\cos 60°$$

skąd otrzymujemy równanie: $4x^2 - 2xR - 11R^2 = 0$
$\Delta = 180R^2$, $\sqrt{\Delta} = 6\sqrt{5}R$; $x_1 = \frac{(1-3\sqrt{5})R}{4}$ i $x_2 = \frac{(1+3\sqrt{5})R}{4}$.
Pierwsza z tych liczb, jako ujemna, nie spełnia warunków zadania. Zatem w tym przypadku długość trzeciej cięciwy wynosi: $\frac{(1+3\sqrt{5})R}{4}$.
2) $\gamma = 120°$
Postępując analogicznie, otrzymujemy tym razem równanie:

$$(R\sqrt{3})^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + x^2 - 2\cdot x\cdot\frac{R}{2}\cdot\cos 120°, \quad \text{skąd} \quad 4x^2 + 2xR - 11R^2 = 0.$$

Ostatnie równanie spełniają liczby $x_3 = \frac{-(1+3\sqrt{5})R}{4}$ i $x_4 = \frac{(3\sqrt{5}-1)R}{4}$.
Pierwsza z nich jest ujemna, zatem w tym przypadku długość trzeciej cięciwy wynosi: $\frac{(3\sqrt{5}-1)R}{4}$.
Trzecia cięciwa może mieć długość $\frac{(1+3\sqrt{5})R}{4}$ lub $\frac{(3\sqrt{5}-1)R}{4}$.

Zadania obowiązkowe

Zadanie 1. Mając dane długości a, b boków trójkąta ostrokątnego ABC oraz długość R promienia okręgu opisanego na tym trójkącie, oblicz sinusy kątów oraz długość trzeciego boku trójkąta. Wykonaj obliczenia, gdy $a = 6$, $b = 10$, $R = 8$.
Wskazówka: Skorzystać z twierdzenia sinusów.
Szkic rozwiązania. Sporządzamy rysunek. Korzystając z twierdzenia sinusów mamy:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$$

$$\frac{6}{\sin\alpha} = 16$$

$$\sin\alpha = \frac{3}{8}$$

Analogicznie dostajemy $\sin\beta = \frac{5}{8}$. Znajdziemy teraz miarę kąta γ.

$$\sin\gamma = \sin(180 - (\alpha+\beta)) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \frac{3\sqrt{39} + 5\sqrt{55}}{64}$$

Bok $c = 2R\sin\gamma = \frac{3\sqrt{39}+5\sqrt{55}}{4}$.
Odpowiedź: $\sin\alpha = \frac{3}{8}$, $\sin\beta = \frac{5}{8}$, $\sin\gamma = \frac{3\sqrt{39}+5\sqrt{55}}{64}$, $c = \frac{3\sqrt{39}+5\sqrt{55}}{4}$.

Zadanie 2. W trójkącie ABC bok $|AB| = c = 12$, bok $|BC| = a = 10$, bok $|CA| = b = 6$. Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D. Oblicz długości odcinków AD i BD.

Wskazówka: Skorzystać z twierdzenia sinusów oraz faktu, że dwusieczna kąta dzieli go na dwa kąty przystające, a suma kątów przyległych wynosi $180°$.

Szkic rozwiązania. Sporządzamy rysunek. Kąty zaznaczone na rysunku jako γ są równe, bo CD jest dwusieczną (dwusieczna dzieli kąt na dwa kąty przystające). Ponadto suma kątów α i β równa się $180°$. Jest tak dlatego, że α i β to kąty przyległe, a suma kątów przyległych to kąt półpełny (czyli $180°$). Oznaczmy dodatkowo $|AD| = y, |BD| = x$. Z rysunku wynika, że: $x+y = 12$. Rozważmy trójkąt BCD.

$$\frac{x}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\beta}$$

$$x = \frac{a}{\sin\beta}\sin\gamma$$

$$\frac{x}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}.$$

Czyli

$$\frac{x}{10} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$

Rozważmy teraz trójkąt ADC.

$$\frac{y}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\alpha}$$

$$y = \frac{b}{\sin\alpha}\sin\gamma$$

$$\frac{y}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Czyli

$$\frac{y}{6} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

Wiemy, że kąty α i β są przyległe, czyli $\alpha + \beta = 180°$. Zatem $\alpha = 180° - \beta$ i $\sin\alpha = \sin(180° - \beta) = \sin\beta$. Wobec powyższego

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{6}$$

Dostajemy dwa równania $\frac{x}{10} = \frac{y}{6}$ oraz $x + y = 12$. Rozwiązaniem tego układu równań jest $x = 7.5$ i $y = 4.5$.
Odpowiedź: $x = 7.5$ i $y = 4.5$.

Zadanie 3. Dany jest trójkąt o bokach a, b, c. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie równy jest R. Oblicz pole tego trójkąta.
Wskazówka: Skorzystać ze wzoru na pole trójkąta $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, gdzie a i b to długości boków trójkąta, a γ oznacza kąt zawarty między nimi.

Szkic rozwiązania.
Mamy $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Z twierdzenia sinusów $\sin\gamma = \frac{c}{2R}$. Stąd $P = \frac{abc}{4R}$.
Odpowiedź: $P = \frac{abc}{4R}$.

Zadanie 4. W trójkącie ABC mamy dane: długości boków AB i AC, długość r promienia okręgu wpisanego oraz miarę kąta $\alpha = |\measuredangle BAC|$. Oblicz: długość boku BC, miary kątów $\beta = |\measuredangle ABC|$ i $\gamma = |\measuredangle ACB|$, pole trójkąta ABC i długość promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wykonaj

obliczenia dla $|AB| = 12$, $|AC| = 8$, $\alpha = \frac{3}{4}\pi$, $r = \frac{4\sqrt{2}}{19+8\sqrt{2}}$
Wskazówka: $P = P_{ABS} + P_{BCS} + P_{CAS}$, gdzie S jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

Szkic rozwiązania. Pole : $P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = 24\sqrt{2}$. Z drugiej strony, niech S będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Wtedy

$$P = P_{ABS} + P_{BCS} + P_{CAS} = \frac{1}{2}|AB|r + \frac{1}{2}|BC|r + \frac{1}{2}|CA|r = \frac{1}{2}r(a+b+c) = \frac{2\sqrt{2}}{19+8\sqrt{2}}(a+20).$$

Porównując obydwa wzory znajdujemy $a = 208 + 96\sqrt{2}$.

Zadanie 5. Boki AB i AC trójkata ABC mają odpowiednio długości 4 i 6 i tworzą kąt BAC o mierze $120°$. Oblicz długość boku BC tego trójkąta.
Wskazówka: Korzystamy z twierdzenia cosinusów.
Odpowiedź: $|BC| = \sqrt{76}$

Zadanie 6. Znajdź cosinusy kątów w trójkącie ABC, w którym $|AB| = 7$, $|BC| = 11$, $|CA| = 14$. Rozstrzygnij, czy trójkąt jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny.
Wskazówka: Ponieważ $\cos\beta < 0$, zatem kąt β jest rozwarty.

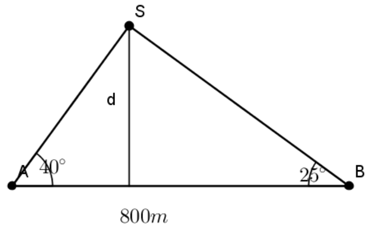
Szkic rozwiązania. Korzystamy trzy razy z twierdzenia cosinusów.
Odpowiedź: $\cos\alpha = \frac{67}{77}$,$\cos\beta = \frac{-13}{77}$, $\cos\gamma = \frac{31}{49}$.
Trójkąt jest rozwartokątny.

Zadanie 7. W trójkącie $ABC : |AB| = 15, |BC| = 10$, kąt $|\measuredangle ABC| = 30°$. Znajdź długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka A.
Wskazówka: Korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ADB, gdzie D jest punktem przecięcia środkowej poprowadzonej z wierzchołka A z bokiem BC.
Odpowiedź: $5\sqrt{10 - 3\sqrt{3}}$

Zadania dodatkowe

Zadanie 8. Udowodnij twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie.
Wskazówka: Korzystamy z twierdzenia sinusów.

Zadanie 9. Z punktu A statek widać pod kątem $\alpha = 40°$, a z punktu B pod kątem $\beta = 25°$. Odcinek brzegu pomiędzy punktami A, B ma długość 800 m. W jakiej odległości od brzegu znajduje sie statek?
Wskazówka: Praktyczne zastosowanie wzoru sinusów.



Szkic rozwiązania. Najpierw wyznaczamy odległość $a = |BS|$. Ponieważ $\gamma = 180° - 40° - 25° = 115°$, więc ze wzorów sinusów

$$\frac{a}{\sin 40°} = \frac{800}{\sin 115°},$$

a stąd

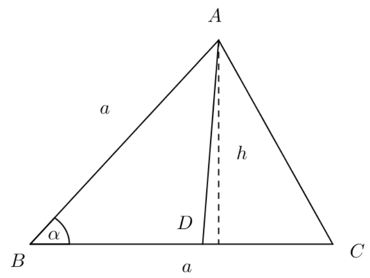
$$a = \frac{800 \cdot \sin 40°}{\sin 115°}.$$

Zatem szukana odległość

$$d = a \sin 25° = \frac{800 \cdot \sin 40° \cdot \sin 25°}{\sin 115°} \approx 240m.$$

Odpowiedź: d=240 m

Zadanie 10. W trójkącie ABC, w którym $|AB| = |BC| = a$ i $|\measuredangle ABC| = \alpha$, poprowadzono odcinek AD, gdzie $D \in BC$ i pole trójkąta ABD jest dwa razy większe od pola trójkąta ADC. Obliczyć długość AD.



Wskazówka: Wykorzystujemy fakt, iż oba trójkąty mają tę samą wysokość. Stosujemy wzór z twierdzenia cosinusów do trójkąta ABD.

Szkic rozwiązania. Z warunków zadania mamy $P_{\Delta ADB} = 2P_{\Delta ADC}$, a ponieważ oba te trójkąty mają tę samą wysokość h, więc

$$\frac{1}{2} \cdot |BD| \cdot h = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |DC| \cdot h,$$

stąd $|BD| = 2|DC|$. Ponadto $|BD| + |DC| = a$, więc $|BD| = \frac{2}{3}a$ oraz $|DC| = \frac{1}{3}a$. Stosując wzór z twierdzenia cosinusów do trójkąta ABD mamy

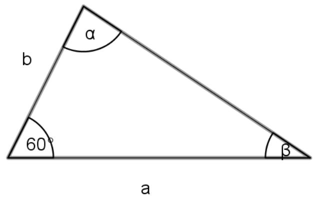
$$|AD|^2 = a^2 + (\frac{2}{3}a)^2 - 2a \cdot \frac{2}{3}a \cos \alpha.$$

Odpowiedź: $|AD| = \frac{a}{3}\sqrt{13 - 12\cos\alpha}$

Zadanie 11. W trójkącie stosunek długości dwóch boków równa się k, a kąt między tymi bokami jest równy 60°. Znaleźć wartości tangensa pozostałych kątów.

Wskazówka: Stosujemy twierdzenie sinusów oraz wykorzystujemy podstawowe zależności trygonometryczne w zadanym trójkącie.

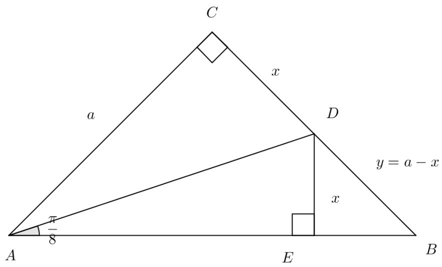
Szkic rozwiązania. Z treści zadania $a = kb$. Na podstawie twierdzenia sinusów $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, skąd $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} = k$



Ponieważ $\alpha = 120^\circ - \beta$, więc $\sin\alpha = \sin(120^\circ - \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta + \frac{1}{2}\sin\beta$, a uwzględniając równość $\sin\alpha = k\sin\beta$, otrzymujemy $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{3}}{2k-1}$. Analogicznie obliczamy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{k\sqrt{3}}{2-k}$. Jeżeli $k = \frac{1}{2}$, to $\cos\beta = 0$ czyli $\beta = 90^\circ$ (a więc $\alpha = 30^\circ$), natomiast dla $k = 2$ otrzymujemy $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, czyli $\beta = 30^\circ$ (a $\alpha = 90^\circ$).

Odpowiedź: Jeżeli $k \neq \frac{1}{2}$ i $k \neq 2$, to $\operatorname{tg}\alpha = \frac{k\sqrt{3}}{2-k}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{3}}{2k-1}$; jeżeli $k = \frac{1}{2}$ lub $k = 2$ - trójkąt prostokątny o kątach ostrych 30° i 60°.

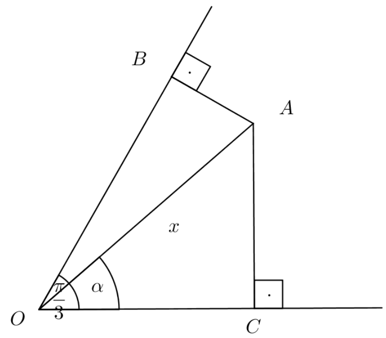
Zadanie 12. W równoramiennym trójkącie prostokątnym przyprostokątna ma długość a. Obliczyć długości odcinków, na które dzieli tą przyprostokatną dwusieczna kąta przeciwległego.



Wskazówka: Możliwe są dwa sposoby rozwiązania zadania. Możemy wykorzystać fakt, że trójkąty ADC i AED są przystające. Pozostałe obliczenia dokonujemy poprzez zastosowanie trygonometrii do planimetrii.

Szkic rozwiązania. Ponieważ trójkąt ABC jest równoramienny, więc kąty przy wierzchołkach A i B są równe i ich miara jest równa $\frac{\pi}{4}$.
P i e r w s z y sposób. Z trójkąta ADC mamy $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \frac{x}{a}$, czyli $x = a\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$.
Ze wzoru $\operatorname{tg}2x = \frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$ otrzymujemy $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$, skąd $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.
Ostatecznie: $x = a(\sqrt{2} - 1)$, $y = a(2 - \sqrt{2})$.
D r u g i sposób. Z punktu D poprowadzimy prostopadłą do AB. Ponieważ trójkąty ADC i AED są przystające, więc $DE = x$. Z trójkąta DBE mamy $\frac{x}{a-x} = \sin\frac{\pi}{4}$, stąd $x = a(\sqrt{2} - 1)$.
Odpowiedź: $x = a(\sqrt{2} - 1)$, $y = a(2 - \sqrt{2})$

Zadanie 13. Punkt A leży wewnątrz obszaru kąta o mierze $\frac{\pi}{3}$. Odległości tego punktu od ramion kąta są równe 2 i $\sqrt{3} - 1$. Znaleźć odległość A od wierzchołka kąta.
Wskazówka: Zastosowanie podstawowych wzorów trygonometrycznych w planimetrii.



Szkic rozwiązania. Oznaczmy odległość punktu A od wierzchołka kąta O przez x. Niech $|AC| = 2$ oraz $|AB| = \sqrt{3} - 1$. Z trójkąta OAB mamy $x = \frac{\sqrt{3}-1}{\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)}$ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{3})$, a z trójkąta OCA mamy $x = \frac{2}{\sin\alpha}$. Skąd

$$\frac{2}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)}, \quad \text{czyli} \quad (\sqrt{3}-1)\sin\alpha = 2\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha).$$

Stosując wzór na sinus różnicy otrzymujemy

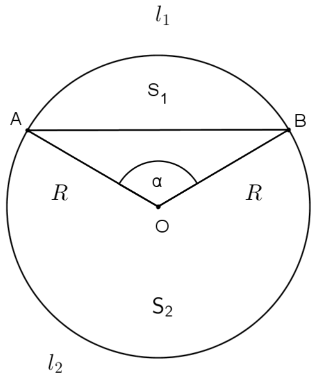
$$(\sqrt{3}-1)\sin\alpha = 2(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha),$$

czyli $\sqrt{3}\sin\alpha - \sin\alpha = \sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha$, skąd $\operatorname{tg}\alpha = 1$. Ze względu na warunek $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ mamy $\alpha = \frac{\pi}{4}$, zatem $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Podstawiając obliczoną wartość $\sin\alpha$ do równania $x = \frac{2}{\sin\alpha}$ otrzymujemy $x = 2\sqrt{2}$
Odpowiedź: $2\sqrt{2}$

Zadanie 14. Cięciwa dzieli obwód koła w stosunku 1 : 2. W jakim stosunku dzieli ona pole tego koła?

Wskazówka: Określamy stosunek pola S_1 wycinka kołowego AOB o promieniu R i kącie środkowym α pomniejszonego o pole trójkąta równoramiennego AOB do pola S_2.

Szkic rozwiązania. Ponieważ $\frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{2}$, więc kąt α w trójkącie AOB stanowi $\frac{1}{3}$ kąta pełnego, czyli $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Pole S_1 jest równe polu wycinka kołowego AOB o promieniu R i kącie środkowym $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, zmniejszonemu o pole trójkąta równoramiennego AOB, czyli $S_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{3}$.



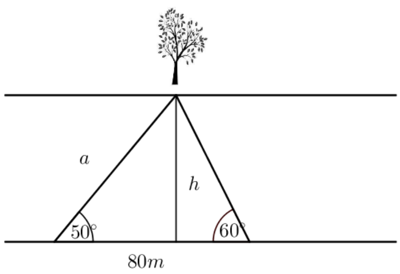
Pole drugiej części na jakie cięciwa AB podzieliła koło $S_2 = \pi R^2 - S_1$. Ze wzorów na S_1 i S_2 mamy

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{R^2(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})}{R^2(\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4})}$$

Odpowiedź: $\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{8\pi + 3\sqrt{3}}$

Zadania domowe

Zadanie 15. Korzystając z rysunku, oblicz szerokość kanału.



Wskazówka: Praktyczne zastosowanie wzoru sinusów.
Odpowiedź: $\approx 56,5m$

Zadanie 16. Na kole opisano trapez, którego jedno ramię ma długość 10 i tworzy z podstawą kąt 60°, a drugie tworzy z podstawą kąt 30°. Obliczyć długość krótszej podstawy trapezu.

Wskazówka: Aby rozwiązać zadanie rozpatrujemy dwa przypadki. Wykorzystujemy warunek konieczny i wystarczający na to, aby w czworokąt można było wpisać okrąg.
Odpowiedź: $5\sqrt{3} - 5$ lub $5\sqrt{3}$

Zadanie 17. W trójkącie równobocznym ABC poprowadzono odcinek AD, gdzie $D \in BC$. Wyznaczyć tangens kąta DAB, jeżeli wiadomo, że stosunek pola trójkąta ABD do pola trójkąta ADC wynosi $\frac{2}{3}$.

Wskazówka: Stosujemy wzór sinusów do trójkąta DAB.
Odpowiedź: $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Zadanie 18. Udowodnić, że jeżeli kąty α, β i γ pewnego trójkąta spełniają warunek $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin^2\gamma$, to trójkąt ten jest prostokątny.
Wskazówka: Oznaczamy przez a, b, c długości boków leżących na przeciw odpowiednich kątów, a przez R promień okręgu opisanego na danym trójkącie. Stosujemy twierdzenie sinusów.

Zadanie 19. Udowodnić, że jeżeli długości a, b, c boków pewnego trójkąta spełniają warunek $a = \sqrt{b(b+c)}$, to w trójkącie tym kąt α (leżący naprzeciw boku o długości a) jest dwa razy większy od kąta β (leżącego naprzeciw boku o długości b).
Wskazówka: Stosujemy twierdzenie sinusów oraz wzory na sumę i różnicę funkcji trygonometrycznych.

Zadanie 20. W trójkącie równoramiennym ACB środkowe poprowadzone z wierzchołków A i B są prostopadłe. Znaleźć tangens kąta przy wierzchołku C.
Wskazówka: Znajdujemy środek ciężkości trójkąta AOB. Korzystamy z twierdzenia o środkowych w trójkącie. Stosujemy twierdzenie sinusów.
Odpowiedź: $\operatorname{tg} 2x = \frac{3}{4}$, gdzie $|\angle ACB| = 2x$

Literatura

(a) A. Zalewska, E. Stachowski, M. Szczurek, *I ty zostaniesz Euklidesem*;
(b) K. Kłaczkow, M. Kurczab, E. Świda, *Matematyka do klasy II*;
(c) W. Leksiński, B. Macukow, W. Żakowski, *Matematyka w zadaniach dla kandydatów na wyższe uczelnie*;
(d) D. M. Zakrzewscy, *Matematyka, matura na 100%*.