Przekształcenia wykresów funkcji

Jerzy Rutkowski

Przekształcenia wykresów funkcji

Teoria

Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją i niech liczby $a, k \in \mathbb{R}$ spełniają warunki: $a > 0$ i $k \neq 0$. Związek między funkcją g otrzymaną z funkcji f, a przekształceniem przeprowadzającym wykres funkcji f na wykres funkcji g, przedstawia poniższa tabela:

L.p.	wartość $g(x)$	przekształcenie przeprowadzające wykres funkcji f na wykres funkcji g
1.	$f(x-a)$	przesunięcie wykresu w prawo o a
2.	$f(x+a)$	przesunięcie wykresu w lewo o a
3.	$f(x)+a$	przesunięcie wykresu w górę o a
4.	$f(x)-a$	przesunięcie wykresu w dół o a
5.	$f(-x)$	symetria wykresu względem osi Oy
6.	$-f(x)$	symetria wykresu względem osi Ox
7.	$f(\|x\|)$	zastąpienie lewej części wykresu symetrycznym odbiciem w osi Oy jego prawej części
8.	$f(-\|x\|)$	zastąpienie prawej części wykresu symetrycznym odbiciem w osi Oy jego lewej części
9.	$\|f(x)\|$	zastąpienie dolnej części wykresu jej symetrycznym odbiciem w osi Ox
10.	$-\|f(x)\|$	zastąpienie górnej części wykresu jej symetrycznym odbiciem w osi Ox
11.	$f(kx)$	dylatacja wykresu wzdłuż osi Ox i o skali $\frac{1}{k}$
12.	$kf(x)$	dylatacja wykresu wzdłuż osi Oy i o skali k

Przekształcenia występujące w powyższej tabeli będziemy nazywać elementarnymi przekształceniami wykresów funkcji.

Złożenie przesunięć wykresów wzdłuż osi Ox i wzdłuż osi Oy jest przesunięciem wykresu o pewien wektor. Mianowicie przesunięcie wykresu funkcji $f(x)$ o wektor $[p, q]$ prowadzi do wykresu funkcji $g(x)$ określonej wzorem $g(x) = f(x-p)+q$. Przesunięcie to jest złożeniem wziętych w dowolnej kolejności przesunięć o wektory $[p, 0]$ i $[0, q]$.

Warto odnotować, że punktami stałymi dylatacji wykresu wzdłuż osi Ox są punkty osi Oy i podobnie punktami stałymi dylatacji wykresu wzdłuż osi Oy są punkty osi Ox.

Zadania obowiązkowe

Zadanie 1. Wykres funkcji $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ otrzymuje się w wyniku kolejnego wykonania następujących przekształceń wykresów funkcji: przesunięcie w lewo o 5, symetria względem osi Oy i odbicie dolnej części wykresu względem osi Ox. Wyrazić wartość $g(x)$ poprzez wartość funkcji f w odpowiednim punkcie.

Szkic rozwiązania. Biorąc za punkt wyjścia wykres funkcji f i wykonując wskazane przekształcenia wykresów otrzymujemy kolejno wykresy funkcji f_1, f_2, f_3 określonych następująco: $f_1(x) = f(x+5)$, $f_2(x) = f_1(-x) = f(5-x)$ i $f_3(x) = |f_2(x)| = |f(5-x)|$. Zatem $g(x) = |f(5-x)|$.

Zadanie 2. Niech funkcje $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnają dla każdego $x \in \mathbb{R}$ warunek $g(x) = f(|x|-4)$. Wskazać dwa kolejne przekształcenia elementarne wykresów, których złożenie przeprowadza wykres funkcji f na wykres funkcji g.

Szkic rozwiązania. Określmy funkcję $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem $h(x) = f(x-4)$. Wówczas $g(x) = h(|x|)$. Ze związków tych wynika, że wykres funkcji h otrzymuje się w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o 4 w prawo, a wykres funkcji g otrzymuje się z wykresu funkcji h w wyniku zastąpienia lewej części wykresu funkcji h przez symetryczne odbicie jego prawej części względem osi Oy. *Odpowiedź*: Przesunięcie wykresu w prawo o 4 i zastąpienie lewej części wykresu odbiciem symetrycznym jego prawej części względem osi Oy.

Zadanie 3. Wskazać trzy kolejne przekształcenia elementarne wykresów funkcji, złożenie których przeprowadza wykres dowolnej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na wykres funkcji $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takiej, że $g(x) = f(|x-4|+5)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Szkic rozwiązania. Wykres funkcji g otrzymuje się z wykresu funkcji f w wyniku kolejnego wykonania następujących przekształceń: przesunięcie w lewo o 5, zastąpienie lewej części wykresu odbiciem symetrycznym względem osi Oy jego prawej części i przesunięcie w prawo o 4. Bowiem wartości w punkcie x funkcji kolejno otrzymywanych w wyniku tych przekształceń są następujące:

$$f(x), \quad f(x+5), \quad f(|x|+5), \quad f(|x-4|+5).$$

Zadanie 4. Odpowiednio przekształcając wykres funkcji $f(x) = x$, naszkicować wykres funkcji $g(x) = |x+1| - 2$.

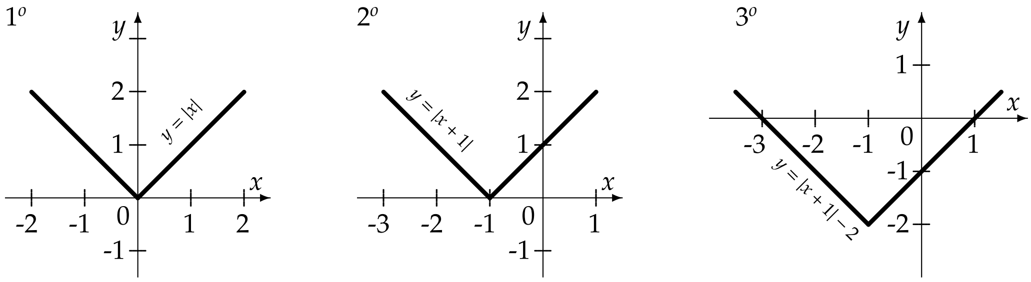
Szkic rozwiązania. Wykres funkcji $g(x)$ otrzymuje się się w wyniku np. następujących kolejnych przekształceń:

1^o. – zastąpienie lewej części wykresu symetrycznym odbiciem względem osi Oy jego prawej części,

2^o. – przesunięcie wykresu w lewo o 1,

3^o. – przesunięcie wykresu w dół o 2.

Kolejne etapy tworzenia wykresu funkcji $g(x)$ przedstawiają poniższe rysunki:



Zadania dodatkowe

Zadanie 5. Biorąc za punkt wyjścia wykres funkcji $f(x) = \sin x$, naszkicować wykres funkcji określonej wzorem:

a) $g(x) = sin2x$; b) $g(x) = \sin\frac{1}{2}x$; c) $g(x) = 2\sin x$; d) $g(x) = \frac{1}{2}\sin x$; e) $g(x) = |\sin x|$.

Zadania domowe

Zadanie 6. Wykres funkcji $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ otrzymuje się z wykresu funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ w wyniku danego przekształcenia. Wyrazić wartość $g(x)$ w dowolnym punkcie $x \in \mathbb{R}$ przez wartość funkcji f w odpowiednm punkcie:

a) przesunięcie w górę o 7;

b) przesunięcie w dół o 4;

c) przesunięcie w prawo o 3;

d) przesunięcie w lewo o 8;

e) symetria względem osi Ox;

f) symetria względem osi Oy;

g) symetria względem punktu $(0, 0)$;

h) symetria względem prostej $x = 1$;

i) symetria względem prostej $y = 5$;

j) zastąpienie lewej części wykresu przez odbicie w osi Oy jego prawej części;

k) zastąpienie prawej części wykresu przez odbicie w osi Oy jego lewej części;

l) symetria dolnej części wykresu względem osi Ox;

ł) symetria górnej części wykresu względem osi Ox;

m) rozciągnięcie wzdłuż osi Oy (czyli tzw. dylatacja pionowa) w skali $k = 6$;

n) rozciągnięcie wzdłuż osi Ox (czyli tzw. dylatacja pozioma) w skali $k = 2$.

Odpowiedź: a) $f(x)+7$; b) $f(x)-4$; c) $f(x-3)$; d) $f(x+8)$; e) $-f(x)$; f) $f(-x)$; g) $-f(-x)$; h) $f(2-x)$; i) $10-f(x)$; j) $f(|x|)$; k) $f(-|x|)$; l) $|f(x)|$; ł) $-|f(x)|$; m) $6f(x)$; n) $f\left(\frac{x}{2}\right)$.

Zadanie 7. Wykres funkcji $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ otrzymuje się z wykresu funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ w wyniku kolejnego wykonania danych przekształceń. Wyrazić wartość $g(x)$ w dowolnym punkcie $x \in \mathbb{R}$ przez wartość funkcji f w odpowiednm punkcie.

a) przesunięcie w lewo o 4 i symetria względem osi Oy;

b) symetria względem osi Oy i przesunięcie w prawo o 5;

c) przesunięcie w lewo o 7 i symetria dolnej części wykresu względem osi Ox;

d) symetria względem osi Oy i dylatacja pionowa w skali $k = 3$;

e) dylatacja pozioma w skali $k = 7$ i przesunięcie w prawo o 6;

f) przesunięcie w lewo o 8, symetria względem osi Oy i zastąpienie lewej części wykresu odbiciem jego prawej części względem osi Oy;

g) przesunięcie w lewo o 4, zastąpienie prawej części wykresu przez odbicie w osi Oy jego lewej części i przesunięcie w prawo o 6.

Odpowiedź: a) $f(4-x)$; b) $f(5-x)$; c) $|f(x+7)|$; d) $3f(-x)$; e) $f\left(\frac{x-6}{7}\right)$; f) $f(8-|x|)$; g) $f(4-|x-6|)$.

Zadanie 8. Wskazać dwa kolejne przekształcenia wykresów funkcji prowadzące od wykresu funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ do wykresu funkcji $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jeśli dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość:

a) $g(x) = f(|x| - 5)$;

b) $g(x) = f(|x + 2|)$;

c) $g(x) = f(4x - 8)$;

d) $g(x) = |f(x + 1)|$;

e) $g(x) = |f(x)| - 4$;

f) $g(x) = f(x - 7) + 9$;

g) $g(x) = f(6 - |x|)$;

h) $g(x) = f\left(\frac{|x|}{3}\right)$;

i) $g(x) = f(2x + 6)$;

j) $g(x) = |f(|x|)|$.

Odpowiedź: a) Przesunięcie w prawo o 5 i zastąpienie lewej części wykresu przez odbicie względem osi Oy jego prawej części;

b) zastąpienie lewej części wykresu przez odbicie względem osi Oy jego prawej części i przesunięcie w lewo o 2;

c) przesunięcie w prawo o 8 i dylatacja wzdłuż osi Ox w skali $k = 1/4$ lub też dylatacja wzdłuż osi Ox w skali $k = 1/4$ i przesunięcie w prawo o 2;

d) symetria dolnej części wykresu względem osi Ox i przesunięcie w lewo o 1 lub na odwrót;

e) odbicie symetryczne dolnej części wykresu względem osi Ox i przesunięcie w dół o 4;

f) przesunięcie w górę o 9 i przesunięcie w prawo o 7 lub na odwrót;

g) przesunięcie w lewo o 6 i zastąpienie prawj części wykresu przez odbicie względem osi Oy jego lewej części;

h) dylatacja wykresu wzdłuż osi Ox w skali $k = 3$ i zastąpienie lewej części wykresu przez odbicie symetryczne jego prawej części względem osi Oy lub na odwrót;

i) przesunięcie wykresu w lewo o 6 i dylatacja wzdłuż osi Ox w skali $k = 1/2$ lub taka sama dylatacja i przesunięcie w lewo o 3;

j) odbicie dolnej części wykresu względem osi Ox i zastąpienie lewej części wykresu przez odbicie symetryczne względem osi Oy jego prawej części lub na odwrót.

Zadanie 9. Wskazać trzy kolejne przekształcenia wykresów funkcji prowadzące od wykresu funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ do wykresu funkcji $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jeśli dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość:

a) $g(x) = f(|x + 6| - 1)$;

b) $g(x) = f(||x| - 9|)$;

c) $g(x) = f(3 - |x - 7|)$;

d) $g(x) = |f(x) + 4| + 1$;

e) $g(x) = -||f(x)| - 2|$.

Odpowiedź: a) Przesunięcie w prawo o 1, zastąpienie lewej części wykresu symetrycznym odbiciem względem osi Oy jego prawej części, przesunięcie w lewo o 6;

b) zastąpienie lewej części wykresu symetrycznym odbiciem względem osi Oy jego prawej części, przesunięcie w prawo o 9, ponowne zastąpienie lewej części wykresu symetrycznym odbiciem względem osi Oy jego prawej części;

c) przesunięcie w lewo o 3, zastąpienie prawej części wykresu symetrycznym odbiciem względem osi Oy jego lewej części, przesunięcie w prawo o 7;

d) przesunięcie w górę o 4, symetryczne odbicie dolnej części wykresu względem osi Ox, przesunięcie w górę o 1;

e) zastąpienie dolnej części wykresu jej odbiciem symetrycznym względem osi Ox, przesunięcie w dół o 2, zastąpienie górnej części wykresu jej odbiciem symetrycznym względem osi Ox.

Zadanie 10. Odpowiednio przekształcając wykres danej funkcji $f(x)$, naszkicować wykres funkcji $g(x)$:

a) $f(x) = x,\ g(x) = |x - 3| + 1$;

b) $f(x) = x,\ g(x) = 2|x - 2| - 1$;

c) $f(x) = x,\ g(x) = |2x + 1| + 1$;

d) $f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = \frac{1}{|x - 1|} + 1$;

e) $f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = \frac{2}{|x - 2|} + 1$;

f) $f(x) = 2^x,\ g(x) = 2^{|x+1|} - 3$.

Przekształcenia wykresów funkcji

Jerzy Rutkowski

Homografie

Teoria

Definicja 1. Funkcję liczbową $h(x)$ nazywamy homografią, jeśli można ją określić wzorem postaci

$$h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad \text{gdzie} \quad a,b,c,d \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad ad - bc \neq 0.$$

Jeśli funkcja $h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ jest homografią i $c \neq 0$, to zachodzą równości:

$$h(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right) + b - \frac{ad}{c}}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2\left(x+\frac{d}{c}\right)}.$$

Ponieważ $h(x)$ jest homografią, więc $bc - ad \neq 0$. Wobec tego w rozważanym przypadku wykres funkcji $h(x)$ otrzymuje się z hiperboli będącej wykresem funkcji $f(x) = \dfrac{1}{x}$ w wyniku następujących kolejnych dwóch przekształceń:

1^o. dylatacja pionowa wykresu o skali $k = (bc - ad)/c^2$,

2^o. przesunięcie wykresu o wektor $v = \left[-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right]$.

Jeśli funkcja $h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ jest homografią i $c = 0$, to wtedy $d \neq 0$ i $a \neq 0$ oraz

$$h(x) = \frac{ax+b}{d} = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}.$$

W przypadku tym homografia jest funkcją liniową, niebędącą funkcją stałą, a jej wykres jest prostą ukośną.

Zadania obowiązkowe

Zadanie 1. Zaprezentowane powyżej obliczenia ogólne przeprowadzić w przypadku poniższej homografii i wskazać przekształcenia wykresów prowadzące od wykresu hiperboli $y = 1/x$ do wykresu danej homografii:

a) $h(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$; b) $h(x) = \dfrac{8x+7}{4x+3}$; c) $h(x) = \dfrac{-3x+4}{6x-1}$.

Szkic rozwiązania. a) $h(x) = \dfrac{x+2}{x-1} = \dfrac{(x-1)+3}{x-1} = 1 + \dfrac{3}{x-1}$, dylatacja pionowa o skali $k = 3$ i przesunięcie o wektor $[1; 1]$.

b) $h(x) = \dfrac{8x+7}{4x+3} = \dfrac{8\left(x+\frac{3}{4}\right)+1}{4\left(x+\frac{3}{4}\right)} = 2 + \dfrac{1}{4\left(x+\frac{3}{4}\right)}$, dylatacja pionowa o skali $k = \frac{1}{4}$ i przesunięcie o wektor $[-\frac{3}{4}, 2]$.

c) $h(x) = \dfrac{-3x+4}{6x-1} = \dfrac{-3\left(x-\frac{1}{6}\right)+\frac{7}{2}}{6\left(x-\frac{1}{6}\right)} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{12} \cdot \dfrac{1}{x-\frac{1}{6}}$, dylatacja pionowa o skali $k = \frac{7}{12}$ i przesunięcie o wektor $[\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}]$.

Zadanie 2. Znaleźć wzór określający homografię $h(x)$, jeśli wiadomo, że jej wykres otrzymuje się z hiperboli $y = 1/x$ w wyniku kolejnego wykonania następujących dwóch przekształceń:

a) dylatacja pionowa o skali $k = 13$ i przesunięcie o wektor $v = [5; 4]$;

b) dylatacja pionowa o skali $k = 4$ i przesunięcie o wektor $v = [5, -1]$;

c) dylatacja pionowa o skali $k = 5$ i przesunięcie o wektor $v = [-8, 0]$.

Odpowiedź: a) Na przykład $h(x) = \frac{4x-7}{x-5}$; b) np. $h(x) = \frac{-x+9}{x-5}$; c) np. $h(x) = \frac{5}{x+8}$.