Teoria

Definicja 1. Wartością bezwzględną liczby $a \in \mathbb{R}$ nazywamy liczbę $|a|$ określoną wzorem

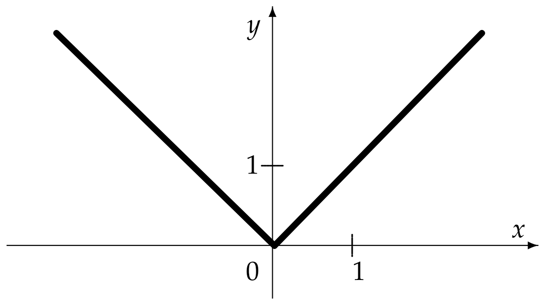
$$|a| = \begin{cases} a, & \text{jeśli} \quad a \geqslant 0, \\ -a, & \text{jeśli} \quad a < 0. \end{cases}$$

Zgodnie z powyższym określeniem liczba $|a|$ jest równa odległości liczby a od liczby 0 na osi liczbowej.

Przykłady. Zachodzą równości: $|7| = 7$, $|-5| = 5$, $|4 - \sqrt{17}| = \sqrt{17} - 4$.

Przyporządkowanie $x \mapsto |x|$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, określa pewną funkcję. Oznaczamy ją symbolem $|\;|$. Mamy tu $|\;| : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Ponieważ $|x| = |-x|$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, więc funkcja $|\;|$ jest parzysta. Wykres funkcji $|\;|$ jest następujący:



Twierdzenie 1. *Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzą równości:*

$$|ab| = |a|\,|b|, \tag{1}$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \qquad (b \neq 0). \tag{2}$$

Warto zapamiętać, że dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$\sqrt{a^2} = |a|. \tag{3}$$

Twierdzenie 2. *Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzą nierówności*

$$\big||a| - |b|\big| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|. \tag{4}$$

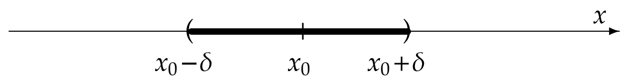
Z pojęciem bezwzględnej wartości liczby blisko związane są podstawowe w analizie matematycznej pojęcia otoczenia i sąsiedztwa punktu na prostej.

Otoczeniem punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy każdy z przedziałów $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, gdzie δ przebiega zbiór $\mathbb{R}^+$ liczb rzeczywistych dodatnich.

Zauważmy, że

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}.$$

Pojęcie otoczenia punktu na prostej ilustruje rysunek:

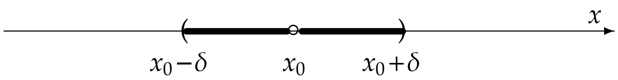


Podobnie sąsiedztwem punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy każdy ze zbiorów $(x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$, gdzie δ przebiega zbiór $\mathbb{R}^+$.

Zauważmy, że

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta\}.$$

Oto rysunek ilustrujący pojęcie sąsiedztwa punktu:



Równania z wartością bezwzględną

Zadania obowiązkowe

Zadanie 1. Rozwiązać równanie $|x - 3| = 1$.

Szkic rozwiązania. Dane równanie jest równoważne z alternatywą $x - 3 = -1$ lub $x - 3 = 1$. Stąd $x = 2$ lub $x = 4$.

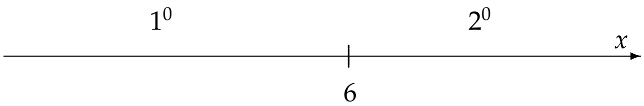
Uwagi metodologiczne. Warto zwrócić uwagę na to, że otrzymane tu liczby 2 i 4 są wszystkimi takimi liczbami, których odległość od liczby 3 jest równa 1.

Zadanie 2. Rozwiązać równanie $4x + |x - 6| = 9$.

Szkic rozwiązania. Zgodnie z definicją bezwzględnej wartości liczby zachodzi równość

$$|x-6| = \begin{cases} x - 6, & \text{jeśli} \quad x \geqslant 6, \\ -x + 6, & \text{jeśli} \quad x < 6. \end{cases}$$

Rozpatrujemy więc dwa przypadki przedstawione na poniższym rysunku:



Przypadek 1^o. $x < 6$. Dane równanie jest w tym przypadku równoważne z równaniem

$$4x + (-x + 6) = 9.$$

Stąd $x = 1$. Ponieważ liczba $x = 1$ spełnia warunek $x < 6$, więc jest ona rozwiązaniem danego równania.

Przypadek 2^o. $x \geqslant 6$. Uzyskujemy w tym przypadku równanie

$$4x + (x - 6) = 9.$$

Stąd $x = 3$. Jednakże liczba $x = 3$ nie spełnia warunku $x \geqslant 6$. Wobec tego żadna liczba $x \geqslant 6$ nie spełnia danego równania.

Z powyższych rozważań wynika, że dane równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie, a mianowicie $x = 1$.

Zadanie 3. Rozwiązać równanie

$$|x-4|+|x-5|+|x-9| \;=\; 15. \tag{5}$$

Szkic rozwiązania. Zgodnie z definicją zachodzą równości:

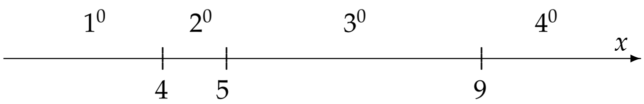
$$|x-4| = \begin{cases} x-4, & \text{jeśli} \quad x \geqslant 4, \\ -x+4, & \text{jeśli} \quad x < 4, \end{cases}$$

$$|x-5| = \begin{cases} x-5, & \text{jeśli} \quad x \geqslant 5, \\ -x+5, & \text{jeśli} \quad x < 5, \end{cases}$$

oraz

$$|x-9| = \begin{cases} x-9, & \text{jeśli} \quad x \geqslant 9, \\ -x+9, & \text{jeśli} \quad x < 9. \end{cases}$$

Rozpatrujemy więc 4 przypadki przedstawione na poniższym diagramie



Przypadek 1^o. $x < 4$. W przypadku tym równanie (5) jest równoważne z równaniem

$$-(x-4)-(x-5)-(x-9) = 15.$$

Powyższe równanie ma rozwiązanie $x = 1$. Ponieważ rozwiązanie to spełnia warunek $x < 4$, więc jest ono rozwiązaniem równania (5).

Przypadek 2^o. $4 \leqslant x < 5$. Otrzymujemy tu równanie

$$(x-4)-(x-5)-(x-9) = 15.$$

Uzyskane równanie ma rozwiązanie $x = -5$. Ponieważ liczba $x = -5$ nie spełnia warunku $4 \leqslant x < 5$, więc nie istnieje żadne rozwiązanie równania (5) spełniające ten warunek.

Przypadek 3^o. $5 \leqslant x < 9$. Tu uzyskujemy równanie

$$(x-4)+(x-5)-(x-9) = 15.$$

Rozwiązaniem tego równania jest $x = 15$. Odrzucamy je, gdyż nie spełnia ono warunku $5 \leqslant x < 9$.

Przypadek 4^o. $x \geqslant 9$. W tym przypadku równanie (5) przyjmuje postać

$$(x-4)+(x-5)+(x-9) = 15.$$

Otrzymujemy tu rozwiązanie $x = 11$. Ponieważ spełnia ono warunek $x \geqslant 9$, więc jest ono rozwiązaniem równania (5).

Odpowiedź: $x = 1$ lub $x = 11$.

Zadanie 4. Rozwiązać równanie $|x+5|+|x+13| = 8$.

Odpowiedź: $x \in \langle -13, -5 \rangle$.

Zadanie 5. Rozwiązać równanie $|x-5|+|x+9|=11$.
Odpowiedź: Brak rozwiązań.

Zadanie 6. Rozwiązać równanie $\big||x-5|-1\big|=1$. *Wskazówka*: Wprowadzić niewiadomą pomocniczą $t=|x-5|$.
Odpowiedź: $x\in\{3;5;7\}$.

Zadania domowe

Zadanie 7. Rozwiązać równanie:

a) $|x-7|=1$; b) $|x+4|=9$;

c) $|x+6|=0$; d) $|x-5|=-3$.

Odpowiedź: a) $x=6$ lub $x=8$; b) $x=-13$ lub $x=5$; c) $x=-6$; d) brak rozwiązań.

Zadanie 8. Rozwiązać równanie:

a) $x+|3x-4|=20$; b) $5x+|2x-9|=-12$;

c) $2x+|5x-1|=13$; d) $4x+|2x-7|=5$;

e) $x+|x-4|=4$; f) $x+|x-6|=3$;

g) $6x+|4x-11|=39$; h) $x-|x-7|=7$.

Odpowiedź: a) $x=-8$ lub $x=6$; b) $x=-7$; c) $x=-4$ lub $x=2$; d) $x=-1$; e) $x\in(-\infty,4\rangle$; f) brak rozwiązań; g) $x=5$; h) $x\in\langle 7,\infty)$.

Zadanie 9. Rozwiązać równanie:

a) • $|x-6|+|x+3|=11$; b) $|x-4|+|x+7|=13$;

c) $|x-4|+|x-7|=7$; d) $|x-4|+|x+11|=15$;

e) $|x-3|+|x-5|+|x-7|=5$; f) $|x-1|+|x-6|+|x+4|=12$;

g) $|x-5|+2|x-2|+3|x-1|=6$; h) $|x-3|+|x-7|+|2x-9|=5$;

i) $|x-1|+|x-7|-2|x-5|=2$; j) $|x+5|-|x+1|+3|x-4|=10$;

k) $|x-1|+|x-3|+|x-7|+|x-11|=14$.

Odpowiedź: a) $x\in\{-4;7\}$; b) $x\in\{-8;5\}$; c) $x\in\{2;9\}$; d) $x\in\langle -11;4\rangle$; e) $x\in\{4;6\}$; f) $x=-1,3$; g) $x\in\langle 1,2\rangle$; h) $x\in\{4,5\}$; i) $x\in\{3\}\cup\langle 7,\infty)$; j) $x\in\{2;6\}$; k) $x\in\langle 3,7\rangle$.

Zadanie 10. Rozwiązać równanie:

a) $|x^2-10x+15|=6$; b) $|x^2-8x+3|=12$.

Odpowiedź: a) $x\in\{1;3;7;9\}$; b) $x\in\{-1;3;5;9\}$.

Zadanie 11. Rozwiązać równanie:

a) $\big||x+2|-2\big|=7$; b) $\big||x-5|-7\big|=3$;

c) $\big||x+4|-8\big|=1$; d) $\big||x-3|-5\big|=5$;

e) $\big||x-4|-9\big|=6$.

Odpowiedź: a) $x\in\{-11;7\}$; b) $x\in\{-5;1;9;15\}$; c) $x\in\{-13;-11;3;5\}$; d) $x\in\{-7;3;13\}$; e) $x\in\{-11;1;7;19\}$.

Zadanie 12. Rozwiązać równanie:

a) $\big||x-4|+|x-2|-|x+1|\big| = 2;$ b) $\big||x-3|+|x-5|-|2x-4|\big| = 4.$

Odpowiedź: a) $x \in \{1;3;5;9\}$; b) $x \in (-\infty, 2) \cup (5, \infty)$.

Nierówności z wartością bezwzględną

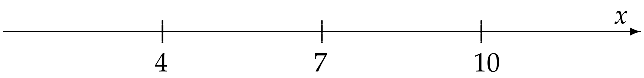
Zadania obowiązkowe

Zadanie 13. Zinterpretować geometrycznie i rozwiązać nierówność $|x-4| < |x-10|$.

Szkic rozwiązania. Liczba $x \in \mathbb{R}$ spełnia daną nierówność wtedy i tylko wtedy, gdy jej odległość od liczby 4 jest mniejsza niż jej od odległość od liczby 10.

Przedstawimy tu dwa sposoby rozwiązania rozpatrywanej nierówności.

Sposób 1^o. Zgodnie z przedstawioną powyżej interpretacją geometryczną liczba $x \in \mathbb{R}$ spełnia daną nierówność wtedy i tylko wtedy, gdy na osi liczbowej leży na lewo od średniej arytmetycznej liczb 4 i 10, czyli na lewo od 7 (zob. rysunek poniżej).



Zatem rozważana nierówność ma rozwiązanie $x < 7$, czyli $x \in (-\infty, 7)$.

Sposób 2^o. Ponieważ występujące w danej nierównośći wartości bezwzględne są liczbami nieujemnymi, więc nierówność ta jest równoważna z następującą

$$|x-4|^2 \quad < \quad |x-10|^2. \tag{6}$$

Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $|x-4| = x-4$ lub równość $|x-4| = -(x-4)$. W każdym z tych dwóch przypadków mamy

$$|x-4|^2 = (x-4)^2 = x^2 - 8x + 16.$$

Podobnie $|x-10|^2 = x^2 - 20x + 100$. Zatem nierówność (6) jest równoważna z następującą

$$x^2 - 8x + 16 \ < \ x^2 - 20x + 100.$$

Stąd $12x < 84$ i ostatecznie $x < 7$.

Zadanie 14. Zinterpretować geometrycznie i rozwiązać nierówność:

a) • $|x| \leqslant 4$; b) • $|x-5| < 2$; c) • $|x+6| \geqslant 3$;

d) • $|x-3| > 1$; e) • $|x+4| > |x-6|$; f) • $|x+1| \leqslant |x-9|$.

Odpowiedź: a) $x \in \langle -4; 4 \rangle$, nierówność spełniają liczby odległe od liczby 0 o co najwyżej 4;

b) $x \in (3; 7)$, nierówność spełniają liczby odległe od liczby 5 o mniej niż 2;

c) $x \in \langle -\infty, -9 \rangle \cup (-3, \infty)$, nierówność spełniają liczby odległe od liczby -6 o przynajmniej 3;

d) $x \in (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$, nierówność spełniają liczby odległe od liczby 3 o więcej niż o 1;

e) $x \in (1, \infty)$, nierówność spełniają liczby, których odległość od liczby -4 jest większa niż odległość od liczby 6;

f) $x \in (-\infty, 4)$, nierówność spełniają liczby, których odległość od liczby -1 nie jest większa niż odległość od liczby 9.

Zadanie 15. Rozwiązać nierówność

$$|x+1| + |x-4| \quad < \quad 11. \tag{7}$$

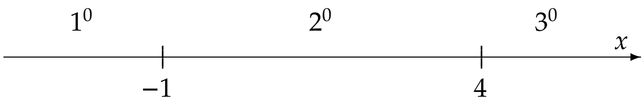
Szkic rozwiązania. Zgodnie z definicją zachodzą równości:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{jeśli} \quad x \geqslant -1, \\ -x-1, & \text{jeśli} \quad x < -1, \end{cases}$$

oraz

$$|x-4| = \begin{cases} x-4, & \text{jeśli} \quad x \geqslant 4, \\ -x+4, & \text{jeśli} \quad x < 4, \end{cases}$$

Rozpatrujemy więc 3 przypadki przedstawione na poniższym diagramie



Przypadek 1^o. $x < -1$. Nierówność (7) jest w tym przypadku równoważna z nierównością

$$-(x+1) - (x-4) < 11.$$

Stąd $x > -4$. Uwzględniając warunek $x < -1$, uzyskaliśmy w rozważanym przypadku rozwiązanie $x \in (-4; -1)$.

Przypadek 2^o. $-1 \leqslant x < 4$. W przypadku tym otrzymujemy nierówność

$$(x+1) - (x-4) < 11,$$

czyli nierówność $5 < 11$. Wynika stąd, że w rozważanym przypadku nierówność (7) ma rozwiązanie $x \in \langle -1; 4)$.

Przypadek 3^o. $x \geqslant 4$. Uzyskujemy tu nierówność

$$(x+1) + (x-4) < 11.$$

Ma ona rozwiązanie $x < 7$. W przypadku 3^o otrzymaliśmy więc rozwiązanie $x \in \langle 4; 7)$.

Biorąc pod uwagę rozwiązania uzyskane w kolejnych przypadkach, otrzymujemy następujące rozwiązanie nierówności (7):

$$x \in (-4; -1) \ \vee \ x \in \langle -1; 4) \ \vee \ x \in \langle 4; 7),$$

czyli ostatecznie $x \in (-4; 7)$.

Zadanie 16. Rozwiązać nierówność: a) • $2|x+2| - |x-6| > 1$; b) • $|x| + |x+2| + |x+4| > 9$;
Odpowiedź: a) $x \in (-\infty; -11) \cup (1; \infty)$; b) $x \in (-\infty; -5) \cup (1; \infty)$.

Zadanie 17. Rozwiązać nierówność

$$\left|\frac{x-3}{x+1}\right| \quad < \quad \frac{1}{3}. \tag{8}$$

Szkic rozwiązania. Dana nierówność jest równoważna z nierównością podwójną

$$-\frac{1}{3} < \frac{x-3}{x+1} < \frac{1}{3}$$

czyli z układem nierówności

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{x+1} > -\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{x-3}{x+1} < \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Obliczenia mogą tu przebiegać następująco:

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{x+1} + \dfrac{1}{3} > 0, \\ \dfrac{x-3}{x+1} - \dfrac{1}{3} < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{3x-9+x+1}{3(x+1)} > 0, \\ \dfrac{3x-9-x-1}{3(x+1)} < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{4(x-2)}{3(x+1)} > 0, \\ \dfrac{2(x-5)}{3(x+1)} < 0; \end{cases}$$

Nierówność (8) jest więc równoważna z układem nierówności

$$\begin{cases} (x-2)(x+1) > 0, \\ (x-5)(x+1) < 0; \end{cases}$$

Pierwsza z nich ma rozwiązanie $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$, a druga $x \in (-1; 5)$. Wobec tego układ tych nierówności ma rozwiązanie $x \in (2; 5)$. I jest to rozwiązanie nierówności (8).

Zadania domowe

Zadanie 18. Rozwiązać nierówność:

a) $|x-4| + |x-11| \leqslant 13$; b) $|x+3| - |x-7| > 8$;

c) $|x-13| - |2x-5| \geqslant 9$; d) $2|x-1| - |x+2| - |x-5| \geqslant 1$.

Szkic rozwiązania. a) $x \in \langle 1; 14 \rangle$; b) $x \in (6; \infty)$; c) $x \in \langle 1, 3 \rangle$; d) $x \in \langle 5; \infty)$.

Zadanie 19. Rozwiązać nierówność:

a) $\left|\dfrac{x+5}{x-3}\right| < 3$; b) $\left|\dfrac{x-3}{x-6}\right| \leqslant 2$; c) $\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right| < \dfrac{1}{2}$;

d) $\left|\dfrac{x+5}{7x+11}\right| < 1$; e) $\left|\dfrac{4x-1}{x-4}\right| < 1$; f) $\left|\dfrac{3x+5}{5x+3}\right| < 1$.

Odpowiedź: a) $x \in (-\infty, 1) \cup (7, \infty)$; b) $x \in (-\infty, 5\rangle \cup \langle 9, \infty)$; c) $x \in (1; 5)$; d) $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$; e) $x \in (-1; 1)$; f) $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.