Równania i nierówności trygonometryczne

Piotr Rzonsowski

Zadania obowiązkowe

Zadanie 1. Obliczyć równania:

a) $\cos 4x = -1,$ b) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3},$

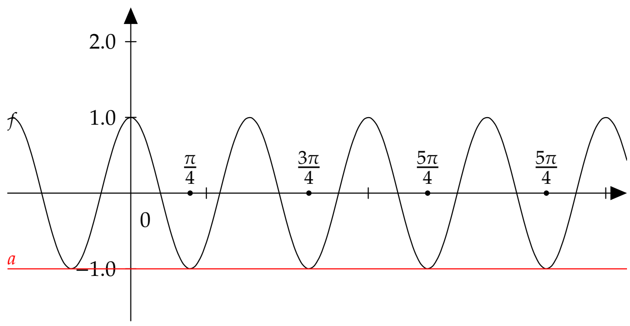
c) $\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}) = 0,$ d) $\sin x = -\frac{1}{2}.$

Wskazówka: (a) Oblicz $\cos y = -1$ a następnie za y podstaw $4x$ i wyznacz x, (b) Odczytaj wartość z tabelki, (c) Oblicz $\cos y = 0$ a następnie za y podstaw $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}$ i wyznacz x, (d) odczytaj z wykresu

Szkic rozwiązania.

a) Przypomnijmy, że $\cos t = -1$ dla $t = \pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Stąd

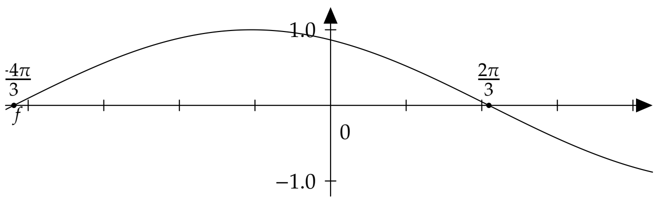
$$\cos 4x = -1 \iff 4x = \pi + 2k\pi \iff x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad \text{dla} \quad k \in \mathbb{Z}.$$



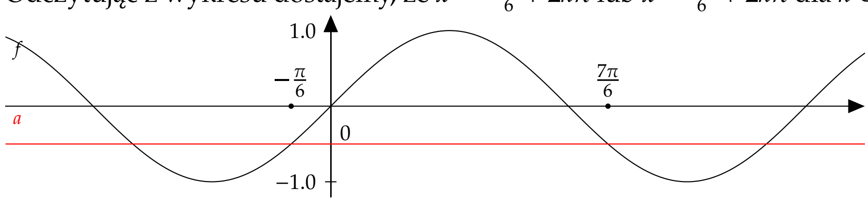
b) Należy odczytać z tabeli (student powinien pamiętać), że $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Ponieważ funkcja tg ma okres π dlatego dostajemy odpowiedź $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

c) Ponieważ $\cos t = 0$ gdy $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, dlatego mamy

$$\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}) = 0 \iff \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad \text{dla} \quad k \in \mathbb{Z}$$



d) Odczytując z wykresu dostajemy, że $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$.



Uwagi metodologiczne. Przed tym zadaniem warto jest przypomnieć wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów $0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 360°$.
Odpowiedź: a) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ dla $k \in \mathbb{Z}$, b) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, c) $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$, d) $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$

Zadanie 2. Rozwiązać równania:

a) $4\cos^2 x + 4\sin x = 5$ b) $\sin x + \cos x = 0$

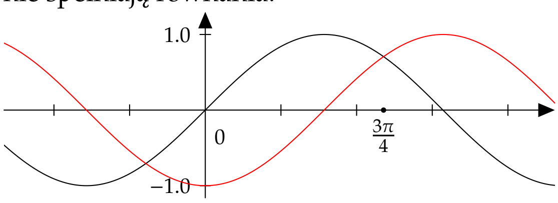
c) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$ d) $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$

Wskazówka: (a) Wprowadź nową zmienną $\sin x = t$ i rozwiąż równanie kwadratowe, a następnie wyznacz x, (b) Przenieś $\cos x$ na prawą stronę i podziel przez $\cos x$ i odczytaj rozwiązanie z wartości $\operatorname{tg} x$, (c) analogicznie do (b), (d) skorzystaj z jedynki trygonometrycznej

Szkic rozwiązania.

a) Przekształcamy równanie w taki sposób, żeby występowała tylko jedna funkcja trygonometryczna. W tym celu skorzystajmy z jedynki trygonometrycznej $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Stąd dostajemy:
$$-4\sin^2 x + 4\sin x - 1 = 0$$
Wprowadzając nową zmienną $t = \sin x$ (zatem $t \in [-1, 1]$) dostajemy równanie kwadratowe:
$$-4t^2 + 4t - 1 = 0$$
Rozwiązując równanie kwadratowe dostajemy, że $t = \frac{1}{2}$. Stąd mamy
$$\sin x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad \text{dla} \quad k \in \mathbb{Z}$$

b) Zauważmy, że równanie to możemy przekształcić do postaci
$$\sin x + \cos x = 0 \iff \operatorname{tg} x = -1 \quad \text{dla} \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{gdzie} \quad k \in \mathbb{Z}$$
Zatem $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$ i to jest rozwiązanie równania, ponieważ wartości $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ nie spełniają równania.



c) Podobnie jak w podpunkcie b) dostajemy
$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0 \iff \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \quad \text{dla} \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{gdzie} \quad k \in \mathbb{Z}$$
Stąd dostajemy $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

d) Korzystając z jedynki trygonometrycznej sprowadzamy równanie do postaci
$$1 - 2\cos^2 x - \frac{1}{2} = 0 \iff \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

zatem $\cos x = \frac{1}{2}$ lub $\cos x = -\frac{1}{2}$. Rozwiązując te równości dostajemy rozwiązanie:

$$x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{4}{3}\pi + 2k\pi$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$,

Odpowiedź: a) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$, b) $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$, c) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ gdzie $k \in \mathbb{Z}$, d) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$

Zadanie 3. Rozwiązać równania: $|\sin x| + \sin x = 0$; *Wskazówka*: Rozważ dwa przypadki $\sin x \leqslant 0$ i $\sin x > 0$.

Szkic rozwiązania. Rozważ dwa przypadki : $\sin x < 0$ i $\sin x \geqslant 0$."

1° Gdy $\sin x \geqslant 0$, wtedy $x \in [0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$ oraz równanie przyjmuje postać:

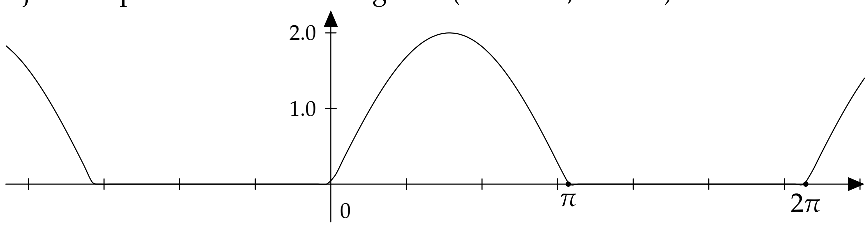
$$2 \sin x = 0.$$

Stąd $x = k\pi$ gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

2° Gdy $\sin x < 0$, to $(-\pi + 2k\pi, 0 + 2k\pi)$ oraz równanie przyjmuje postać:

$$-\sin x + \sin x = 0$$

Stąd jest ono prawdziwe dla każdego $x \in (-\pi + 2k\pi, 0 + 2k\pi)$.



Uwagi metodologiczne. Tu uwagi metodologiczne (o ile jest potrzeba).

Odpowiedź: $x \in [-\pi + 2k\pi, 0 + 2k\pi]$

Zadanie 4. Rozwiązać nierówności:

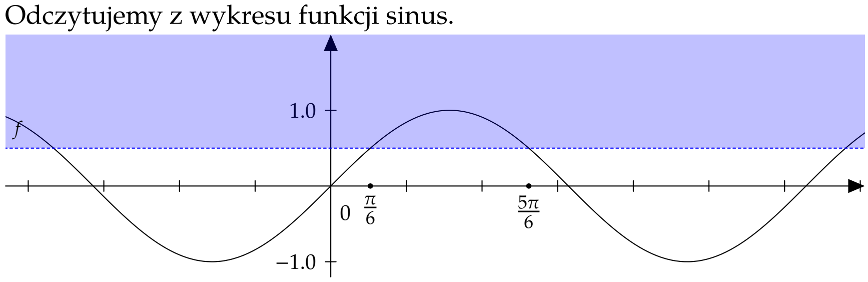
a) $\sin x > \frac{1}{2}$ b) $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$

c) $\sin x + \cos x > 0$ d) $\cos^2 x - 5 \cos x < 0$

Wskazówka: (a),(b),(c) odczytujemy z wykresu, (d) Zapisz nierówność w postaci $\cos x(\cos x - 5) <$ i rozważ kiedy ten iloczyn będzie ujemny.

Szkic rozwiązania.

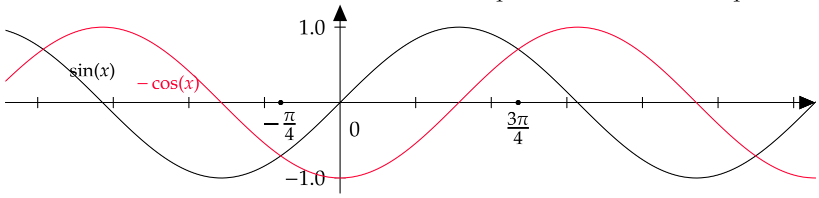
a) Odczytujemy z wykresu funkcji sinus.



b) Odczytujemy z wykresu funkcji tangens.
c) Korzystając z wzoru $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ oraz sumy sinusów dostajemy

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cos(x - \frac{\pi}{4}) > 0$$

Nierówność ta jest spełniona, gdy $\cos(x - \frac{\pi}{4}) > 0$. Zatem $x \in (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3}{4}\pi + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$



d) Zapiszmy nierówność w następującej postaci

$$\cos x(\cos x - 5) < 0$$

Zauważmy, że $\cos x - 5$ jest zawsze ujemne, dlatego powyższa nierówność jest spełniona gdy $\cos x > 0$. Stąd dostajemy $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ dla $k \in \mathbb{Z}$

Odpowiedź: a) $x \in (\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi)$ dla $k \in \mathbb{Z}$, b) $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi)$ dla $k \in \mathbb{Z}$ c) $x \in (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3}{4}\pi + 2k\pi)$ dla $k \in \mathbb{Z}$, d) $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ dla $k \in \mathbb{Z}$

Zadania dodatkowe

Zadanie 5. Rozwiązać równanie $\sin x + \cos x = 1$ *Wskazówka*: Przemnóż równanie przez $\frac{\sqrt{2}}{2}$ i skorzystaj ze wzoru na $\sin(\alpha + \beta)$.

Szkic rozwiązania. Dzielimy równanie obustronnie przez $\sqrt{2}$ i dostajemy

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zauważmy, że $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Stąd

$$\sin x\cos\frac{\pi}{4} + \cos x\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \sin(\frac{\pi}{4} + x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

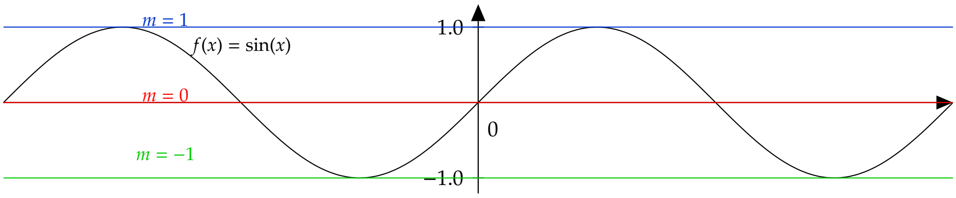
Rozwiązując ostatnią równanie dostajemy:

$$x = 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{dla} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Metoda ta działa dla każdego równania postaci $a\sin x + b\cos x = c$, dla takiego równania wykonujemy dzielenie przez $\sqrt{a^2 + b^2}$, a następnie postępujemy analogicznie.
Odpowiedź: $x = 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad$ dla $\quad k \in \mathbb{Z}$

Zadanie 6. Znajdź w zależności od wartości parametru m liczbę rozwiązań równania $\sin x = m$, w przedziale $[-2\pi, 2\pi]$. *Wskazówka*: Odczytaj z wykresu

Szkic rozwiązania. Odczytujemy z wykresu



Odpowiedź: dla $|m| > 1$ brak rozwiązań, dla $m = 1, -1$ dwa rozwiązania, dla $m \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ cztery rozwiązania, dla $m = 0$ pięć rozwiązań

Zadanie 7. Rozwiązać równanie $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$. *Wskazówka*: Skorzystaj ze wzoru na $\cos\alpha + \cos\beta$.

Szkic rozwiązania. Korzystając z tożsamości trygonometrycznych dostajemy:

$$\cos x + \cos 4x = 2\cos\frac{5}{2}x\cos(-\frac{3}{2}x) \qquad \cos 2x + \cos 3x = 2\cos\frac{5}{2}x\cos(-\frac{1}{2}x)$$

Stąd równanie przyjmuje postać

$$2\cos\frac{5}{2}x[\cos\frac{3}{2}x + \cos\frac{x}{2}] = 0 \Longleftrightarrow 4\cos\frac{5}{2}x\cos x\cos\frac{x}{2} = 0$$

Zatem rozwiązania są postaci $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}k\pi$ lub $x = (2k+1)\pi$ lub $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$

Odpowiedź: $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}k\pi$ lub $x = (2k+1)\pi$ lub $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$

Zadania domowe

Zadanie 8. Rozwiązać równania:

a) $\sin 3x = \sin 2x$ b) $\sin x + \cos 3x - \sin 5x = 0$

c) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ d) $\frac{2\,\mathrm{tg}\, x}{1 - \mathrm{tg}^2 x} = 0$

Wskazówka: (a),(b) Skorzystaj z wzoru na różnicę $\sin\alpha - \sin\beta$, (c) Podziel równanie przez dwa i skorzystaj ze wzoru na $\sin\alpha + \beta$, (d) Skorzystaj ze wzoru na $\mathrm{tg}\, 2\alpha$.

Odpowiedź: a) $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}k\pi \quad \vee \quad x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ b) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \quad \vee \quad x = \pm\frac{\pi}{12}\pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$, c) $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{7}{12}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$, d) $k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Zadanie 9. Rozwiązać nierówności:

a) $\sin x \cos x < \frac{1}{4}$ b) $\mathrm{tg}\, 2x > \mathrm{tg}\, x$

c) $|\sin 2x| < \frac{1}{2}$ d) $|\sin x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Wskazówka: Wykonaj rysunki dla podanych funkcji.

Odpowiedź: a) $x \in (\frac{5}{12}\pi + k\pi, \frac{13}{12}\pi + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$, b) $x \in (-\frac{\pi}{4} + k\pi, k\pi) \cup (\frac{\pi}{4}\pi + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$, c) $x \in (-\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}), \quad k \in \mathbb{Z}$, d) $x \in (\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3}{4}\pi + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$

Literatura

Literatura

Literatura

— M. Kurczab, E. Kurczab, E.Świda, Matematyka Podręcznik do liceów i techników klasa 1, Oficyna Edukacyjna, 2010.
— M. Kurczab, E. Kurczab, E.Świda, Matematyka Zbiór zadań do liceów i techników klasa 1, Oficyna Edukacyjna, 2010.
— M. Braun, M. Dobrowolska, M. Karpiński, J. Lech, E. Zamościńska,Matematyka II Zbiór zadań dla liceum i technikum, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 2005.
— N. Dróbka, K. Szymański, Zbiór zadań z matematyki dla kl. I i II liceum ogólnokształcącego, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1994.