Równania i nierówności wykładnicze i logarytmiczne

Paweł Foralewski

Teoria

Ponieważ funkcje wykładnicza i logarytmiczna zostały wprowadzone wcześniej, tutaj przypomnimy tylko definicję logarytmu i jego podstawowe własności.

Definicja 1. Niech a i b będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi i niech $a \neq 1$. Logarytmem liczby b przy podstawie a nazywamy liczbę x spełniającą równanie $a^x = b$. Piszemy wtedy $x = \log_a b$.

Twierdzenie 1. *Dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, $a \neq 1$, mamy:*
(a) $\log_a 1 = 0$,
(b) $\log_a a^b = b$,
(c) $a^{\log_a b} = b$,
(d) $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$,
(e) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$,
(f) $\log_a b^k = k \log_a b$ *dla dowolnego* $k \in \mathbb{R}$,
(g) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, $c \neq 1$.

Zadania obowiązkowe

Szanowni Państwo, zgodnie z sugestiami w zadaniach 1 i 2 dodałem po jednym łatwym przykładzie (podpunkty a). Zdaję sobie sprawę, że w związku z ilością godzin przeznaczonych w repetytorium na równania i nierówności wykładnicze i logarytmiczne, zadań obowiązkowych może być za dużo. Z drugiej strony każde z nich jest inne, wymaga zastosowania innej metody postępowania (nie byłem tutaj zbyt oryginalny i częściowo wykorzystałem materiały ze starego repetytorium), więc nie chciałbym żadnego z nich wyrzucać. Proponuję zatem, aby do słowa „obowiązkowe" podeszli Państwo w tym przypadku z pewnym dystansem i ilość rozwiązanych na zajęciach zadań obowiązkowych uzależnili od swojego wyczucia, możliwości grupy itd. itp.

Zadanie 1. Rozwiąż równania:

a) $3^{x+1} = 81$

b) $8^{3x-5} - 0,125\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{6-5x} = 0$,

c) $2 \cdot 16^x - 17 \cdot 4^x = -8$,

d) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{11-x} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{3x-1}$,

e) $15^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 5^{4x-4}$.

Wskazówka: W podpunkcie a) zapisz 81 jako 3^4, w podpunkcie b) sprowadź potęgi w równaniu do tych samych podstaw, z kolei w podpunkcie c) jako wspólną podstawę przyjmij 4 i podstaw $t = 4^x$, w podpunkcie d) kluczową rolę odgrywa tożsamość $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 1$, na koniec w podpunkcie e) zapisz liczbę 15 jako $3 \cdot 5$ i rozdziel potęgi o podstawie 3 i o podstawie 5.

Szkic rozwiązania. a) Mamy $3^{x+1} = 3^4$ i wykorzystując różnowartościowość funkcji $f(x) = 3^x$, dostajemy $x = 3$.

b) Sprowadzając potęgi w równaniu do tych samych podstaw otrzymujemy

$$2^{3(3x-5)} = 2^{-3}\left(\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^2}\right)^{6-5x},$$

skąd
$$2^{9x-15} = 2^{7,5x-12}.$$
Ponieważ funkcja wykładnicza $f(x) = 2^x$ jest różnowartościowa, dostajemy $9x - 15 = 7,5x - 12$, skąd ostatecznie $x = 2$.

c) Przyjmując w tym równaniu jako wspólną podstawę liczbę 4 mamy
$$2 \cdot (4^x)^2 - 17 \cdot 4^x + 8 = 0.$$
Podstawiając $t = 4^x$ dostajemy
$$2t^2 - 17t + 8 = 0.$$
W konsekwencji $t = \frac{1}{2}$ lub $t = 8$ i ostatecznie $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{3}{2}$.

d) Kluczowa dla rozwiązania kolejnego równania jest równość $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 1$, skąd dostajemy
$$\sqrt{3} - \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-1}.$$
Zatem nasze równanie przybiera postać
$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{11-x} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1-3x}.$$
Po porównaniu wykładników otrzymujemy $x = -5$.

e) W tym przypadku mamy
$$5^{2x+4} \cdot 3^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 5^{4x-4}.$$
Stąd
$$3^{4-x} = 5^{2x-8} = \left(\frac{1}{25}\right)^{4-x}.$$
Mnożąc stronami przez 25^{4-x} dostajemy
$$(25 \cdot 3)^{4-x} = 1,$$
co zachodzi gdy $4 - x = 0$, czyli $x = 4$.
Odpowiedź: a) $x = 3$, b) $x = 2$, c) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{3}{2}$, d) $x = -5$, e) $x = 4$.

Zadanie 2. Rozwiąż równania:

a) $\log_3(x - 5) = 2$

b) $\log_{x-2}(x^3 - 14) = 3$,

c) $\log_5(x^2 - 1) - \log_5(x + 1) = 3$,

d) $x^{\log_2 \sqrt{x} - 1} = \sqrt{8}$,

e) $5 \log_3 x - 2 \log_9 x = 12$.

Wskazówka: Uwaga ogólna: pamiętaj o wyznaczeniu dziedziny równania. Ponadto, w podpunktach a) i b) skorzystaj z definicji logarytmu, podobnie w podpunkcie c) korzystając najpierw ze wzoru e) z Twierdzenia 1, w podpunkcie d) zlogarytmuj obie strony równania przy podstawie 2, dwa razy wykorzystaj wzór f) z Twierdzenia 1 i w końcu podstaw $t = \log_2 x$, w podpunkcie e) wykorzystaj wzór g) z Twierdzenia 1

Szkic rozwiązania. a) Dziedziną tego równania jest przedział $(5, \infty)$. Z definicji logarytmu mamy $x - 5 = 3^2$, skąd dostajemy $x = 14$

b) Dziedziną tego równania jest zbiór $(\sqrt[3]{14}, \infty)\backslash\{3\}$ $(x \in ((2,3) \cup (3,\infty)) \cap (\sqrt[3]{14}, \infty))$. Z definicji logarytmu możemy dane równanie zapisać w postaci

$$x^3 - 14 = (x-2)^3,$$

lub równoważnie

$$x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Rozwiązaniami równania kwadratowego są $x = 1 - \sqrt{2}$ oraz $x = 1 + \sqrt{2}$. Ponieważ $1 - \sqrt{2} < \sqrt[3]{14}$, ostatecznie otrzymujemy $x = 1 + \sqrt{2}$.

c) Dziedziną tego równania jest przedział $(1, \infty)$ (muszą być jednocześnie spełnione warunki $x^2 - 1 > 0$ oraz $x + 1 > 0$). Korzystając z własności logarytmu mamy

$$\log_5 \frac{x^2-1}{x+1} = 3,$$

lub równoważnie

$$\log_5(x-1) = \log_5 125,$$

skąd (korzystając z faktu, że funkcja logarytmiczna jest różnowartościowa) $x - 1 = 125$. Zatem rozwiązaniem równania jest $x = 126$ (należy do dziedziny).

d) Dziedziną tego równania jest zbiór $\mathbb{R}_+\backslash\{1\}$. Zlogarytmujmy obie strony równania przy podstawie 2

$$\log_2 x^{\log_2 \sqrt{x} - 1} = \log_2 \sqrt{8}.$$

Dalej mamy

$$\left(\frac{1}{2}\log_2 x - 1\right)\log_2 x = \frac{3}{2}.$$

Podstawiając $t = \log_2 x$, otrzymujemy równanie $\frac{1}{2}t^2 - t - \frac{3}{2} = 0$, którego rozwiązaniami są $t = -1$ lub $t = 3$. Stąd $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 8$ (oba rozwiązania należą do dziedziny równania).

e) Dziedziną tego równania jest zbiór $\mathbb{R}_+$. Korzystając z równości $\log_9 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 9} = \frac{1}{2}\log_3 x$ dostajemy $4\log_3 x = 12$. W konsekwencji $\log_3 x = 3$, czyli $x = 27$.

Odpowiedź: a) $x = 14$, b) $x = 1 + \sqrt{2}$, c) $x = 126$, d) $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 8$, e) $x = 27$.

Zadanie 3. Rozwiąż nierówności:

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^{4x} < \frac{1}{64}$,

b) $4^{x+\frac{1}{2}} - 5 \cdot 2^x > -2$,

c) $\log_7 \log_{\frac{2}{3}}(x + 11) > 0$,

d) $\log_x \left(x^3 - \frac{1}{4}x\right) \leqslant 1$.

Wskazówka: Uwaga ogólna: pamiętaj, że funkcje $f(x) = a^x$ oraz $g(x) = \log_a x$ są rosnące dla $a > 1$ oraz malejące kiedy $a \in (0,1)$. W podpunkcie a) sprowadź potęgi do tej samej podstawy, w b) podstaw $t = 2^x$, w c) skorzystaj dwukrotnie z definicji logarytmu, a w d) rozważ dwa przypadki w zależności od x. Oczywiście, w podpunktach c) i d) wyznacz najpierw dziedziny nierówności.

Szkic rozwiązania. a) Sprowadzając obie strony nierówności do tej samej podstawy otrzymujemy

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{4x} < \left(\frac{1}{4}\right)^3.$$

Ponieważ funkcja wykładnicza przy podstawie mniejszej od 1 jest malejąca, dostajemy $4x > 3$, skąd ostatecznie $x \in (\frac{3}{4}, \infty)$.

b) W nierówności
$$2^{2(x+\frac{1}{2})} - 5 \cdot 2^x > -2$$
podstawiamy $t = 2^x$. Mamy $t > 0$. Rozwiązaniem nierówności kwadratowej $2t^2 - 5t + 2 > 0$ jest zbiór $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (2, \infty)$, skąd wobec faktu, że $t > 0$, dostajemy $(0, \frac{1}{2}) \cup (2, \infty)$. Ostatecznie $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

c) Dziedziną nierówności jest przedział $(-11, -10)$ (muszą być jednocześnie spełnione warunki $x + 11 > 0$ oraz $\log_{\frac{2}{3}}(x + 11) > 0$). Mamy
$$\log_7 \log_{\frac{2}{3}}(x + 11) > \log_7 1,$$
skąd po opuszczeniu logarytmu zewnętrznego o podstawie większej niż 1 otrzymamy
$$\log_{\frac{2}{3}}(x + 11) > 1 = \log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3}.$$
Ponownie możemy opuścić logarytm, pamiętając o zmianie znaku nierówności na przeciwny (podstawa logarytmu jest mniejsza od 1). Mamy zatem $x + 11 < \frac{2}{3}$, czyli $x < -10\frac{1}{3}$. Po uwzględnieniu dziedziny, dostaniemy, że zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(-11, -10\frac{1}{3})$.

d) Dziedziną nierówności jest zbiór $(\frac{1}{2}, \infty)\backslash\{1\}$ ($x^3 - \frac{1}{4}x > 0$, $x > 0$, $x \neq 1$). Po opuszczeniu logarytmów w nierówności
$$\log_x \left(x^3 - \frac{1}{4}x\right) \leqslant \log_x x,$$
zwrot otrzymanej nierówności zależy od wartości x. Zatem musimy rozważyć dwa przypadki.
1^o $\frac{1}{2} < x < 1$. Mamy $x^3 - \frac{1}{4}x \geqslant x$, czyli $x^3 - \frac{5}{4}x \geqslant 0$, zatem $x \in [-\frac{\sqrt{5}}{2}, 0] \cup [\frac{\sqrt{5}}{2}, \infty]$. Ponieważ $\frac{1}{2} < x < 1$, w rozważanym przypadku otrzymamy pusty zbiór rozwiązań.
2^o $x > 1$. Rozwiązaniem nierówności $x^3 - \frac{1}{4}x \leqslant x$ jest zbiór $[-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{2}] \cup [0, \frac{\sqrt{5}}{2}]$. Ponieważ $x > 1$, dostajemy $x \in (1, \frac{\sqrt{5}}{2}]$.
Rozwiązaniem danej nierówności jest suma rozwiązań z poszczególnych przypadków czyli przedział $(1, \frac{\sqrt{5}}{2}]$.
Odpowiedź: a) $x \in (\frac{3}{4}, \infty)$, b) $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, c) $x \in (-11, -10\frac{1}{3})$, d) $x \in (1, \frac{\sqrt{5}}{2}]$.

Zadania dodatkowe

Zadanie 4. Rozwiąż równania:

a) $8^{7x+5} - (\sqrt[3]{4})^{9-x} = 0$,

b) $(0,125)^x \cdot (\sqrt{2})^{x+1} = \left(\frac{4}{\sqrt[3]{2}}\right)^{3x}$,

c) $4^{x+1} - 5 \cdot 2^{x+1} + 4 = 0$,

d) $4^{\sqrt[4]{x+23}} = 10 \cdot 2^{\sqrt[4]{x+23}} - 16$,

e) $(\sqrt[3]{7})^{2-3x} = \frac{1}{25}5^{3x}$,

f) $4^{x+1} + 3 \cdot 5^{2x} = 5^{2x+1} - 4^x$.

Wskazówka: Powyższe równania można rozwiązać analogicznie jak odpowiednie równania z Zadania 1
Odpowiedź: a) $x = -\frac{27}{65}$, b) $x = \frac{1}{15}$, c) $x = 1$ lub $x = -1$, d) $x = -22$ lub $x = 58$, e) $x = \frac{2}{3}$, f) $x = \frac{1}{2}$.

Zadanie 5. Rozwiąż równanie

$$2^{x-1} + 2^{x-2} + \ldots = \sqrt{3 \cdot 2^{x+1} - 8}.$$

Wskazówka: Najpierw wyrażenie po lewej stronie przekształcamy wykorzystując wzór na sumę zbieżnego szeregu geometrycznego nieskończonego, potem podnosimy obie strony równania do kwadratu i w końcu rozwiązujemy równanie postępując analogicznie jak w Zadaniu 1 b).

Uwagi metodologiczne. Część absolwentów szkół średnich może nie znać wzoru na sumę zbieżnego szeregu geometrycznego nieskończonego. Rozwiązując to zadanie należy ten wzór wyprowadzić ze wzoru na sumę częściową szeregu geometrycznego nieskończonego.
Odpowiedź: $x = 1$ lub $x = 2$.

Zadanie 6. Rozwiąż równania:

a) $\log_{x+5} 9 = 2$,

b) $\log_4[\log_3(\log_2 x)] = 0$,

c) $1 - \log\sqrt{x-5} + \log\sqrt{2x-3} = \log 30$,

d) $\log(x+6) - 2 = \frac{1}{2}\log(2x-3) - \log 25$,

e) $x^{\log x} = 100x$,

f) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$.

Wskazówka: Powyższe równania można rozwiązać analogicznie jak odpowiednie równania z Zadania 2.
Odpowiedź: a) $x = -2$, b) $x = 8$, c) $x = 6$, d) $x = 6$ lub $x = 14$, e) $x = 0,1$ lub $x = 100$, f) x=16.

Zadanie 7. Rozwiąż równania:

a) $\log|2x-3| - \log|3x-2| = 1$,

b) $\log\sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} + \ldots} = \log(4x-15)$.

Wskazówka: W pierwszym równaniu należy najpierw „opuścić znaki wartości bezwzględnej” i rozważyć odpowiednie przypadki, natomiast w równaniu drugim należy najpierw skorzystać ze wzoru na sumę zbieżnego szeregu geometrycznego nieskończonego.

Szkic rozwiązania. W pierwszym równaniu należy najpierw „opuścić znaki wartości bezwzględnej” i rozważyć odpowiednie przypadki, natomiast w równaniu drugim należy najpierw skorzystać ze wzoru na sumę zbieżnego szeregu geometrycznego nieskończonego.
Odpowiedź: $x = \frac{17}{28}$ lub $x = \frac{23}{32}$, b) $x = 5$.

Zadanie 8. Rozwiąż nierówności:

a) $0,25^{x^2} \cdot 2^{x+1} \geqslant 1$,

b) $3 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 9 \leqslant 0$,

c)$\log_8 \log_3 x \leqslant \frac{1}{3}$,

d) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) - \log_{\frac{1}{3}}(x+1) < 2$,

e) $\log_{x+4} x > -1$.

Wskazówka: Powyższe nierówności można rozwiązać analogicznie jak odpowiednie nierówności z Zadania 3.
Odpowiedź: a) $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, b) $x \in [-1, 2]$, c) $x \in (0, 9]$, d) $x \in \left(\frac{5}{4}, \infty\right)$, e) $x \in (-2 + \sqrt{5}, \infty)$.

Zadanie 9. Rozwiąż nierówność

$$2\log x + 4\log^2 x + 8\log^3 x + \ldots < \log^2 x.$$

Wskazówka: Aby tradycji stało się zadość, także w tym zadaniu należy wykorzystać wzór na sumę zbieżnego szeregu geometrycznego nieskończonego.
Odpowiedź: a) $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 1\right)$.

Zadania domowe

Zadanie 10. Rozwiąż równania:

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{9}{16}$,

b) $5^{x^2+2} = 5^{3x}$,

c) $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$,

d) $\frac{10^x + 10^{-x}}{10^x - 10^{-x}} = 5$,

e) $2^{3x} \cdot 7^{x-2} = 4^{x+1}$,

f) $6^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$.

Odpowiedź: a) $x = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ lub $x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$, b) $x = 1$ lub $x = 2$, c) $x = 2$, d) $x = \log_{10}\sqrt{\frac{3}{2}}$, e) $x = 2$, f) $x = 4$.

Zadanie 11. Rozwiąż równania:

a) $\log_{3-x} 2(x^2 + 2x - 1) = 2$

b) $\log_3^2 x - \log_3 x^3 + 2 = 0$

c) $\frac{\log(\log x)}{\log(\log x^2 - 1)} = 2$

d) $\log\left(x + \frac{1}{2}\right) = \log\frac{1}{2} - \log x$

e) $\log_{2\cos x}(9 - x^2) = 0$,

f) $x + \log(5 - 2^{x+1}) - x\log 5 - \log 2 = 0$.

Odpowiedź: a) $x = 1$ lub $x = -11$, b) $x = 3$ lub $x = 9$, c) brak rozwiązań, d) $x = \frac{1}{2}$, e) brak rozwiązań, f) $x = 1$ lub $x = -1$.

Zadanie 12. Rozwiąż nierówności:

a) $5^{\frac{x+1}{x}} > \sqrt{5}$,

b) $2^{3x} + 2^{2x+1} - 2^x - 2 < 0$

c) $\log_4(x + 3) - \log_4(x - 1) \geqslant 2 - \log_4 8$

d) $\log_{2x-3} x > 1$.

Odpowiedź: a) $x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$, b) $x \in (-\infty, 0)$, c) $x \in (-\infty, 1) \cup [5, \infty)$, d) $x \in (2, 3)$.

Literatura

(a) N. Dróbka, K. Szymański, Zbiór zadań z matematyki dla klasy III i IV liceum ogólnokształcącego, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1973;

(b) R. Kowalczyk, K. Niedziałomski, C. Obczyński, Matematyka dla studentów i kandydatów na wyższe uczelnie. Repetytorium, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012;

(c) W. Leksiński, B. Macukow, W. Żakowski, Matematyka w zadaniach. Dla kandydatów na wyższe uczelnie, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1987;

(d) J. Uryga, Nowa matura. Matematyka. Rozwiązywanie zadań, ParkEdukacja Nauka bez tajemnic, 2008.