

Geometria analityczna

Paweł Mleczko

Teoria

Informacja 1 (o prostej).

— postać ogólna prostej: $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$,

— postać kanoniczna (kierunkowa) prostej: $y = ax + b$.

Współczynnik a nazywamy współczynnikiem kierunkowym prostej.

Twierdzenie 2 (o prostych równoległych i prostopadłych).

— Dwie proste są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy mają takie same współczynniki kierunkowe. warunek równoległości

— Dwie proste są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyn ich współczynników kierunkowych wynosi -1 .

Twierdzenie 3 (odległość punktu od prostej). Odległość d punktu (x_0, y_0) od prostej $Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$) wynosi

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Definicja 1 (równanie okręgu). Okręgiem o środku w punkcie (x_0, y_0) i promieniu r , $r > 0$, nazywamy zbiór punktów (x, y) spełniających równanie

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Równanie to nazywane jest postacią kanoniczną.

Zadania obowiązkowe

Zadanie 1. Narysować zbiór $A = \{(x, x - 1) : x \in \mathbb{R}\}$. Jak można nazwać zbiór A ? W jaki inny sposób można go opisać?

Szkic rozwiązania. Można $A = \{(x, y) : y = x - 1, x \in \mathbb{R}\}$. Zbiór A da się przedstawić jako prosta w postaci:

— ogólnej: $-x + y + 1 = 0$,

— kierunkowej: $y = x - 1$.

Zadanie 2. Wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez punkty $(1, 5)$ oraz $(-2, 1)$.

Szkic rozwiązania. Szukamy prostej o równaniu kierunkowym $y = ax + b$. Oba punktu należą do prostej, więc jej wzór znajdziemy rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} 5 = a + b \\ 1 = -2a + b. \end{cases}$$

Rozwiązując układ dowolną znaną metodą znajdujemy: $a = \frac{4}{3}$, $b = 3\frac{2}{3}$.

Uwagi metodologiczne. Warto wspomnieć, że w tablicach matematycznych znajduje się wzór na współczynniki prostej, który można wyprowadzić choćby metodą wykorzystaną do rozwiązania zadania. Korzystając z tego wzoru można znaleźć współczynnik $a = \frac{1-5}{-2-1} = \frac{4}{3}$. Należy zobrazować sytuację na rysunku i zwrócić uwagę, że współczynnik kierunkowy jest tangensem odpowiedniego kąta.

Odpowiedź: $y = \frac{4}{3}x + 3\frac{2}{3}$

Zadanie 3. Wyznaczyć prostą równoległą do prostej $2x + \frac{1}{2}y - 8 = 0$ i przechodzącą przez punkt $(1, 3)$.

Szkic rozwiązania. Przedstawiamy równanie prostej w postaci kierunkowej: $y = -4x + 16$. Szukamy prostej o równaniu $y = -4x + b$ (patrz twierdzenie 2). Punkt $(1, 3)$ należy do tej prostej, zatem rozwiązujemy równanie $3 = -4 + b$. Stąd $b = 7$.

Odpowiedź: $y = -4x + 7$

Zadanie 4. Wyznaczyć prostą prostopadłą do prostej $y = -\frac{1}{2}x + 3$ i przechodzącą przez punkt $(0, 0)$.

Szkic rozwiązania. Szukamy prostej postaci $y = ax + b$, gdzie współczynnik a spełnia warunek $-\frac{1}{2} \cdot a = -1$ (patrz twierdzenie 2). Stąd $a = 2$ oraz – ponieważ $(0, 0)$ należy do prostej: $b = 0$.

Odpowiedź: $y = 2x$

Zadanie 5. Czy proste $x + y + 1 = 0$ oraz $y = -x + 5$ są równoległe?

Szkic rozwiązania. Obie proste przedstawiamy w postaci kierunkowej i stwierdzamy, że mają takie same współczynniki kierunkowe.

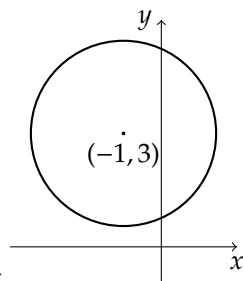
Odpowiedź: Tak.

Zadanie 6. Narysować w układzie współrzędnych okrąg dany równaniem

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 4 = 0.$$

Szkic rozwiązania. Przedstawiamy okrąg w postaci kanonicznej: $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = (\sqrt{6})^2$.

Uwagi metodologiczne.



Odpowiedź:

Zadanie 7. Znaleźć styczne do okręgu $x^2 + y^2 = 9$ przechodzące przez punkt $(4, 0)$.

Szkic rozwiązania. Szukamy stycznych postaci $y = ax + b$. Ponieważ styczne mają przechodzić przez punkt $(4, 0)$, więc $b = -4a$. Stąd należy sprawdzić, dla jakiego parametru a układ równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = ax - 4a \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie. Jest tak dla $a = \pm \frac{3\sqrt{7}}{7}$.

Odpowiedź: $y = \frac{3\sqrt{7}}{7}x - \frac{12\sqrt{7}}{7}$ lub $y = -\frac{3\sqrt{7}}{7}x + \frac{12\sqrt{7}}{7}$

Zadanie 8. Znaleźć styczne do okręgu $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 12 = 0$ i równoległe do prostej $x + y + 1 = 0$.
Szkic rozwiązania. Szukamy prostych o równaniu $x + y + b = 0$ dla odpowiedniej wartości b .
 Przedstawiamy okrąg w postaci kanonicznej

$$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = (2\sqrt{2})^2.$$

Szukamy takich wartości b , dla których odległość środka okręgu $(-2, 4)$ od prostej $x + y + b = 0$ będzie równa $2\sqrt{2}$. Korzystając ze wzoru na odległość prostej od punktu otrzymujemy równanie

$$|2 + b| = 4,$$

którego rozwiązaniem jest $b = 2$ lub $b = -6$.

Uwagi metodologiczne. Zadanie można rozwiązać sprowadzając sytuację – analogicznie jak w zadaniu 7 do równania kwadratowego z parametrem. Ten sposób można zaproponować jako zadanie domowe.

Odpowiedź: $y = -x - 2$ lub $y = -x + 6$

Zadanie 9. Ile punktów wspólnych z okręgiem $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ ma prosta $y = x + 3$?

Szkic rozwiązania. Przedstawiamy równanie okręgu w postaci kanonicznej:

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = (\sqrt{2})^2.$$

Liczymy odległość środka okręgu $(1, -1)$ od prostej $x - y + 3 = 0$. Odległość ta wynosi $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ i jest większa od promienia okręgu.

Uwagi metodologiczne. Można rozwiązać odpowiedni układ równań i zbadać ilość jego rozwiązań.

Odpowiedź: Prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem.

Zadania dodatkowe

Zadanie 10. Wyznaczyć liczbę punktów wspólnych okręgu o równaniu $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 4 = 0$ z prostą o równaniu $y - x - m = 0$ w zależności od parametru m .

Szkic rozwiązania. Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} y = x + m \\ x^2 + y^2 + 2x - 6y + 4 = 0 \end{cases}$$

w zależności od parametru m . Sprowadza się to do rozwiązania równania

$$2x^2 + (2m - 4)x + m^2 - 6m + 4 = 0$$

w zależności od m .

Uwagi metodologiczne. Zadanie można rozwiązać korzystając ze wzoru na odległość punktu od prostej.

Odpowiedź: Dla $m \in (4 - 2\sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3})$ są dwa wspólne punkty, dla $m = 4 + 2\sqrt{3}$ lub $m = 4 - \sqrt{3}$ jest jeden punkt wspólny (prosta jest styczną), dla $m \in (-\infty, 4 - 2\sqrt{3}) \cup ((4 + 2\sqrt{3}), \infty)$ nie ma punktów wspólnych.

Zadanie 11. Czy okręgi $x^2 + y^2 + 2x + 8y + 16 = 0$ oraz $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$ mają punkty wspólne?

Szkic rozwiązania. Przedstawiamy oba okręgi w postaci kanonicznej:

$$(x+1)^2 + (y+4)^2 = 1,$$

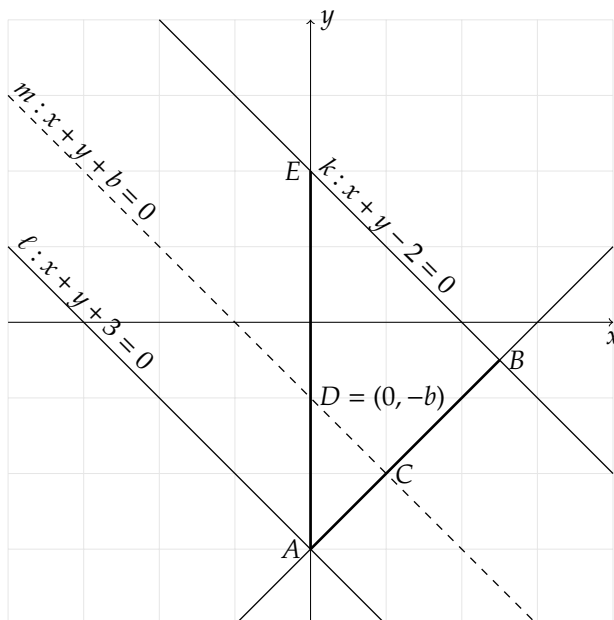
$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{5})^2.$$

Ponieważ odległość środków obu okręgów wynosi $\sqrt{58}$, natomiast suma długości promieni wynosi $\sqrt{5} + 1$, więc okręgi nie mają punktów wspólnych.

Odpowiedź: Brak punktów wspólnych.

Zadanie 12. Wyznaczyć równanie okręgu stycznego do dwóch prostych o równaniach $x+y-2=0$ oraz $x+y+3=0$ i przechodzącego przez punkt $(1,0)$.

Szkic rozwiązania. Zauważmy na początek, że proste są równoległe. Stąd środek szukanego okręgu znajdować się będzie na prostej $x+y+b=0$. Wyznamy b , korzystając z poniższego rysunku.



Prosta przechodząca przez punkty A , B i C jest prostopadła do prostych k i ℓ . Korzystamy teraz z twierdzenia Talesa oraz faktu, że z warunków zadania wynika $|AC| = |CB|$ i otrzymujemy

$$\frac{|AD|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|CB|} = 1.$$

Stąd D leży w połowie długości odcinka AE , czyli $D = (0, -\frac{1}{2})$, więc $b = \frac{1}{2}$.

Oznaczmy środek okręgu przez $(x_0, -x_0 - \frac{1}{2})$. Odległość środka okręgu od prostej $x+y+3=0$ jest taka sama jak odległość środka okręgu od punktu $(1,0)$. Stąd

$$\frac{|x_0 - x_0 - \frac{1}{2} + 3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{(x_0 - 1)^2 + (x_0 + \frac{1}{2})^2}.$$

Rozwiązaniem powyższego równania są punkty: $(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ oraz $(\frac{5}{4}, -\frac{7}{4})$.

Odpowiedź: $(x + \frac{3}{4})^2 + (y - \frac{1}{4})^2 = \frac{25}{4}$ lub $(x - \frac{5}{4})^2 + (y + \frac{7}{4})^2 = \frac{25}{4}$

Zadanie 13. Punkty $A = (-1, -2)$, $B = (2, 1)$ oraz $C = (-4, -3)$ są wierzchołkami trójkąta ABC . Obliczyć pole tego trójkąta.

Szkic rozwiązania. Wyznamy długość podstawy AB oraz długość wysokości trójkąta opuszczonej z wierzchołka C . W tym celu znajdziemy równanie prostej k przechodzącej przez punkty A i B . Mamy: $y = x - 1$. Długość odcinka AB wynosi $3\sqrt{2}$. Długość wysokości $|h|$ to odległość punktu C od prostej k . Mamy: $|h| = \sqrt{2}$.

Odpowiedź: $P = 3$

Zadanie 14. Wierzchołki rombu $ABCD$ znajdują się w punktach $A = (-1, 0)$, $B = (3, -1)$ oraz $D = (-2, 4)$. Znajdź współrzędne wierzchołka C oraz oblicz pole rombu P .

Szkic rozwiązania. Wyznamy wektory $\vec{AB}$ oraz $\vec{AD}$. Mamy $\vec{AB} = [4, -1]$, $\vec{AD} = [-1, 4]$. Wektory $\vec{AC}$, $\vec{DB}$, zawierające przekątne rombu d_1, d_2 dane są wzorami $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$, $\vec{DB} = \vec{AB} - \vec{AD}$, czyli $\vec{AC} = [3, 3]$, $\vec{DB} = [5, -5]$. Mamy $\vec{AC} = [x_c - x_a, y_c - y_a] = [x_c + 1, y_c - 0] = [3, 3]$, skąd łatwo wyznaczamy współrzędne $C = (2, 3)$. Pole $P = \frac{1}{2}|\vec{AC}| \cdot |\vec{DB}| = \frac{1}{2}3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 15$.

Uwagi metodologiczne. Warto wspomnieć o wektorach i działaniach na wektorach.

Odpowiedź: $C = (2, 3)$, $P = 15$

Zadanie 15. Na prostej o równaniu $y = 5$ w taki sposób wyznaczyć punkt B , aby łamana ABC , gdzie $A = (2, 3)$, $C = (5, 4)$, miała jak najmniejszą długość?

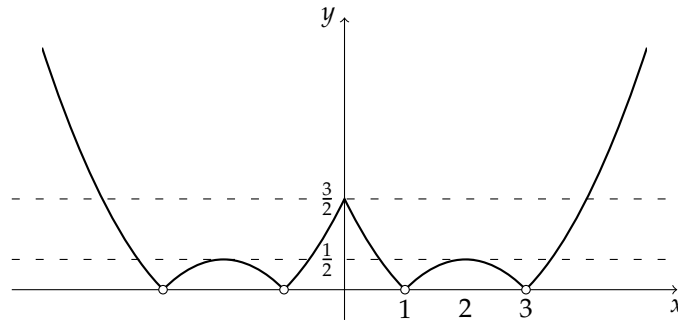
Szkic rozwiązania. Można napisać funkcję liczącą długość łamanej (w zależności od współrzędnej punktu B) i znaleźć wartość najmniejszą tej funkcji. Znacznie łatwiej jednak jest skorzystać z symetrii. Niech $C' = (5, 6)$ będzie punktem powstałym z odbicia względem prostej $y = 5$ punktu C . Zauważmy, że długość łamanej ABC oraz ABC' jest taka sama (dobre miejsce, żeby powiedzieć o izometriach). Leży on na przecięciu prostej $y = 5$ oraz prostej przechodzącej przez punkty A oraz C' : $y = x + 1$.

Uwagi metodologiczne. Warto wspomnieć i podyskutować o izometriach (w zadaniu pojawi się symetria, można popytać o inne, a nawet zrobić dygresję w stronę własności izometrii i teorii grup).

Odpowiedź: $B = (4, 5)$

Zadanie 16. Wyznaczyć pole trójkąta o wierzchołkach $(0, x)$, $(x, 3)$ oraz $(1, 3)$ jako funkcję f zmiennej x , $x \in \mathbb{R}$ i naszkicować jej wykres. Wyznaczyć liczbę rozwiązań równania $f(|x|) = m$ w zależności od wartości parametru m , $m \in \mathbb{R}$.

Szkic rozwiązania. Długość podstawy to $|x - 1|$ a wysokości $|x - 3|$ (rysunek!). Stąd wielkość pola można opisać funkcją $f: \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 1, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x) = \frac{1}{2}|x - 1| \cdot |x - 3| = \frac{1}{2}(x - 1)(x - 3)$. Funkcje tego typu rysuje się na zajęciach z funkcji kwadratowej i wielomianów, studenci powinni sobie już poradzić. Z wykresu odczytujemy ilość rozwiązań w zależności od m . Wykres funkcji g , $g(x) = f(|x|)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 1, 3\}$, przedstawia się następująco:



Uwagi metodologiczne. Warto przedyskutować dziedzinę (lub maksymalny zbiór określoności) funkcji.

Odpowiedź: Ilość rozwiązań w zależności od m : $0 - m \in (-\infty, 0)$, $4 - \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $8 - m \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $6 - m = \frac{1}{2}$, $3 - m = \frac{3}{2}$ $2 - m \in \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Zadania domowe

Zadanie 17. Wyprowadzić wzór na prostą przechodzącą przez punkty (x_1, y_1) oraz (x_2, y_2) .

Odpowiedź: $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$

Zadanie 18. Znaleźć równanie okręgu o środku w punkcie $S = (1, 3)$, jeśli dodatkowo wiadomo, że punkt $(2, -1)$ należy do tego okręgu.

Odpowiedź: $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 17$.

Zadanie 19. Okrąg, do którego środek należy do osi OY a promień ma długość $r = \sqrt{5}$ jest styczny do prostej o równaniu $x + 2y - 1 = 0$ Napisz równanie tego okręgu.

Odpowiedź: $(x - 6)^2 + y^2 = 5$ lub $(x + 4)^2 + y^2 = 5$.

Zadanie 20. Czy prosta $y = 2x + 3$ ma punkt wspólny z okręgiem $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$?

Odpowiedź: Tak.

Zadanie 21. Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC , gdzie $A = (-2, 1)$, $B = (0, -3)$ i $C = (4, 3)$.

Odpowiedź: $\left(x + \frac{8}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{7}\right)^2 = \frac{52}{49}$.

Zadanie 22. Okrąg o równaniu $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$ jest opisany na pewnym trójkącie równobocznym. Znajdź równanie okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Odpowiedź: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 1$.