Funkcje wymierne

Jerzy Rutkowski

Teoria

Przypomnijmy, że przez $\mathbb{R}[x]$ oznaczamy zbiór wszystkich wielomianów zmiennej x i o współczynnikach rzeczywistych.

Definicja 1. Funkcją wymierną jednej zmiennej nazywamy funkcję liczbową, którą można określić wzorem postaci $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, gdzie $g, h \in \mathbb{R}[x]$ i przy tym $h \neq 0$. Dziedziną tej funkcji jest zbiór $\mathbb{R} \setminus A$, gdzie A jest zbiorem miejsc zerowych wielomianu h.

Uwaga. W powyższej definicji zapis $h \neq 0$ oznacza, że h nie jest wielomianem zerowym.

Zbiór wszystkich funkcji wymiernych zmiennej x i o współczynnikach rzeczywstych oznaczamy przez $\mathbb{R}(x)$.

Działania dodawania i mnożenia funkcji wymiernych określa się wzorami:

$$\frac{g}{h} + \frac{k}{l} = \frac{gl + hk}{hl}, \tag{1}$$

$$\frac{g}{h} \cdot \frac{k}{l} = \frac{gk}{hl}. \tag{2}$$

Powyższe wzory są takie same jak wzory określające dodawanie i mnożenie liczb wymiernych.

Równania wymierne

Zadania na zajęcia

Zadanie 1. Rozwiązać równanie

$$\frac{x-20}{x^2-4x-32} + \frac{3x-18}{x^2-13x+40} = \frac{x-14}{x^2-x-20}. \tag{3}$$

Zadanie 2. Rozwiązać równanie

$$\frac{24}{x^3-8} + \frac{3}{x^2+2x+4} = \frac{10}{x^2+x-6}. \tag{4}$$

Zadania domowe

Zadanie 3. Rozwiązać równanie:

a) $\frac{2}{x^2-4} + \frac{1}{x^2+6x+8} = \frac{6}{x^2+3x-10}$;

b) $\frac{2x-7}{x^2-7x+12} + \frac{3x-3}{x^2+x-20} = \frac{5x+17}{x^2+2x-15}$;

c) $\dfrac{2x-16}{x^2-4x-5}+\dfrac{5x-10}{x^2-3x-4}=\dfrac{2x-6}{x^2-9x+20}$;

d) $\dfrac{x-3}{x^2-3x+2}+\dfrac{2x+1}{x^2+x-6}=\dfrac{5x-3}{x^2+2x-3}$;

e) $\dfrac{x-9}{x^2-8x+15}+\dfrac{x+6}{x^2-9x+18}=\dfrac{2x-8}{x^2-11x+30}$;

f) $\dfrac{2x+1}{x^2+x-20}+\dfrac{3x+27}{x^2-2x-35}=\dfrac{2x-5}{x^2-11x+28}$;

g) $\dfrac{x+5}{x^2+13x+42}+\dfrac{4x+30}{x^2+16x+63}=\dfrac{2x+15}{x^2+15x+54}$;

h) $\dfrac{x-10}{x^2+x-12}+\dfrac{x+1}{x^2+2x-15}=\dfrac{x+6}{x^2+9x+20}$;

i) $\dfrac{x-17}{x^2-16x+63}+\dfrac{4x-16}{x^2-14x+45}=\dfrac{3x-11}{x^2-12x+35}$;

j) $\dfrac{4x-12}{x^2-2x-15}+\dfrac{3x-11}{x^2+x-6}=\dfrac{5x-19}{x^2-7x+10}$;

k) $\dfrac{2x-16}{x^2-12x+35}+\dfrac{4x-12}{x^2-2x-15}=\dfrac{7x-9}{x^2-4x-21}$;

l) $\dfrac{x+3}{x^2-15x+44}+\dfrac{2x+25}{x^2+3x-28}+\dfrac{4x+10}{x^2-4x-77}=0$;

ł) $\dfrac{x-10}{x^2-17x+72}+\dfrac{x-7}{x^2-20x+99}=\dfrac{x-5}{x^2-19x+88}$;

m) $\dfrac{2x-17}{x^2-9x+20}+\dfrac{2x-29}{x^2-11x+28}+\dfrac{2x-6}{x^2-12x+35}=0$;

n) $\dfrac{2x-6}{x^2-11x+30}+\dfrac{7x-2}{x^2-2x-24}=\dfrac{8x+5}{x^2-x-20}$;

o) $\dfrac{2x-13}{x^2-13x+40}+\dfrac{3x-21}{x^2-16x+55}=\dfrac{2x-19}{x^2-19x+88}$.

Zadanie 4. Rozwiązać równanie:

a) $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{2}{x^2-5x+4}=\dfrac{1}{x^2-7x+10}$;

b) $\dfrac{5}{x^2+4x-21}+\dfrac{6}{x^2-9}=\dfrac{3}{x^2+12x+27}$;

c) $\dfrac{1}{x^2-11x+28}+\dfrac{2}{x^2-8x+15}=\dfrac{1}{x^2-9x+20}$;

d) $\dfrac{1}{x^2-7x+12}+\dfrac{3}{x^2-12x+27}=\dfrac{1}{x^2-16x+63}$;

e) $\dfrac{1}{x^2-8x+15}+\dfrac{1}{x^2-12x+35}+\dfrac{1}{x^2-16x+63}=\dfrac{3}{x^2-12x+27}$;

f) $\dfrac{4}{x^2-14x+45}+\dfrac{12}{x^2-4x-32}=\dfrac{13}{x^2-5x-36}$.

Zadanie 5. Rozwiązać równanie:

a) $\dfrac{9}{x^3-27}+\dfrac{5}{x^2+3x+9}=\dfrac{2}{x^2-9}$;

b) $\dfrac{5}{x^2-2x+4}+\dfrac{2}{x^2-x-6}=\dfrac{12}{x^3+8}$;

c) $\dfrac{2}{x^3-8}-\dfrac{2}{x^3+8}=\dfrac{1}{x^4+4x^2+16}$.

Nierówności wymierne

Zadania na zajęcia

Zadanie 6. Rozwiązać nierówność $\dfrac{(x+3)(x-7)}{(x+1)^2(x-2)}\geqslant 0$.

Zadanie 7. Rozwiązać nierówność $\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{1}{x-5}>\dfrac{4}{x-4}$.

Zadanie 8. Rozwiązać nierówność $\dfrac{x-1}{x^2-4x+9}<\dfrac{x-3}{x^2-5x+7}$.

Zadania domowe

Zadanie 9. Rozwiązać nierówność:

a) $\dfrac{x-6}{x-13}\leqslant 0$;

b) $\dfrac{(x-7)(x+4)}{x-5}<0$;

c) $\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-3)(x-5)}\geqslant 0$;

d) $\dfrac{(x+3)(x-4)}{(x-11)(x-6)}\leqslant 0$;

e) $\dfrac{x(x-1)(x+2)}{(x-5)(x-7)(x+4)}>0$;

f) $\dfrac{(x-5)(x+6)^3(x+9)}{(x-1)^2(x+2)(x+4)^4}\geqslant 0$.

Zadanie 10. Rozwiązać nierówność:

a) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-3}>0$;

b) $\dfrac{1}{x-4}>\dfrac{2}{x-1}$;

c) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{8}{x+2}\leqslant\dfrac{15}{x+5}$;

d) $\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{3}{x-3}\geqslant 2$.

Zadanie 11. Rozwiązać nierówność:

a) $\dfrac{5x-48}{x^2-8x+20}>-1$;

b) $\dfrac{x-2}{x^2+2}\leqslant\dfrac{x+8}{x^2+10x+26}$.

Uwaga. Należy bardzo uczulać studentów na to, że nie można mnożyć nierówności stronami przez wyrażenie, które dla pewnych dwóch argumentów przyjmuje wartości różnych znaków (chyba, że wyjściowa nierówność to $0\leqslant 0$).

Rozkład funkcji wymiernej na sumę wielomianu i ułamków prostych

(nieobowiązkowe)

Teoria

W punkcie tym ograniczamy się wyłącznie do funkcji wymiernych o współczynnikach rzeczywistych. Przypomnijmy więc ważne oznaczenia:

$\mathbb{R}[x]$ – zbiór wszystkich wielomianów zmiennej x i o współczynnikach rzeczywistych,

$\mathbb{R}(x)$ – zbiór wszystkich funkcji wymiernych zmiennej x i o współczynnikach rzeczywstych.

Twierdzenie 1. *Dla każdej funkcji wymiernej $\frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}(x)$ istnieją wielomiany $q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$ takie, że*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \qquad \text{oraz} \qquad \operatorname{st} r(x) < \operatorname{st} g(x).$$

Powyższe twierdzenie wynika natychmiast z twierdzenia o dzieleniu z resztą dla wielomianów. Można je wysłowić następująco:

Każdą funkcję wymierną można przedstawić w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej takiej, że stopień jej licznika jest mniejszy od stopnia jej mianownika.

Przypomnijmy pewne ważne twierdzenie z arytmetyki wielomianów o współczynnikach rzeczywistych:

Twierdzenie 2. *Każdy wielomian $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ stopnia dodatniego ma następujący rozkład na iloczyn wielomianów nierozkładalnych o współczynnikach rzeczywistych:*

$$f(x) = (x - a_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - a_m)^{k_m}(x^2 + b_1x + c_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + b_nx + c_n)^{l_n},$$

gdzie $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_1, \ldots a_m \in \mathbb{R}$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ oraz $\Delta_j = b_j^2 - 4c_j < 0$ dla $j = 1, \ldots, n$.

W wielu zagadnieniach (np. przy całkowaniu funkcji wymiernych) ważną rolę odgrywają pewne specjalne funkcje wymierne zwane ułamkami prostymi.

Definicja 2. Ułamkiem prostym o współczynnikach rzeczywistych nazywamy każdą funkcję wymierną postaci

$$\frac{A}{(x-a)^k} \qquad \text{lub} \qquad \frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^l},$$

gdzie $k, l \in \mathbb{N}$, $A, B, C, a, b, c \in \mathbb{R}$ oraz $b^2 - 4c < 0$.

Ułamkami prostymi o współczynnikach rzeczywistych są np. funkcje wymierne:

$$\frac{5}{x-4}, \qquad \frac{7}{(x+6)^2}, \qquad \frac{8x-13}{x^2+x+1}, \qquad \frac{14x-9}{(x^2-4x+7)^3} \qquad \text{i} \qquad \frac{1}{(x^2-5x+9)^6}.$$

Twierdzenie 3. *Każdą funkcję wymierną, której licznik ma niższy stopień niż mianownik, można przedstawić w postaci sumy ułamków prostych.*

Z powyższego twierdzenia i z twierdzenia 1 wynika następujący wniosek:

Wniosek. Każda funkcja wymierna rozkłada się na sumę wielomianu i ułamków prostych.

Zadania na zajęcia

Zadanie 12. Rozłożyć na sumę ułamków prostych daną funkcję wymierną:

a) $\dfrac{4x^2 - 11x - 2}{(x-2)^3}$; b) $\dfrac{5x^2 + 30x + 61}{(x+4)(x+1)(x-3)}$;

c) $\dfrac{2x^2+39x+1}{(x-1)^2(x+5)}$; d) $\dfrac{11x^2+12x-5}{(x-2)(x^2+x+1)}$.

Zadanie 13. Rozłożyć na sumę wielomianu i ułamków prostych daną funkcję wymierną:

a) $\dfrac{x^3-4x^2+7x+2}{x^2-1}$; b) $\dfrac{x^5+6x^4-4x^3+8x^2-x+13}{x^3}$.

Zadania domowe

Zadanie 14. Rozłożyć na sumę ułamków prostych daną funkcję wymierną:

a) $\dfrac{x+15}{x^2-25}$; b) $\dfrac{x+13}{x^2+5x+4}$; c) $\dfrac{7x^2+7x-8}{x^3-x}$;

d) $\dfrac{4x^2+9x+7}{(x+1)(x+2)(x+3)}$; e) $\dfrac{x^2+4x-1}{(x+1)^3}$; f) $\dfrac{4x^2-17x+7}{(x-2)^3}$;

g) $\dfrac{5x^2+5x+6}{x^2(x+3)}$; h) $\dfrac{13x+1}{(x+1)^2(x+5)}$; i) $\dfrac{3x^3-15x^2+32}{x^2(x-4)^2}$;

j) $\dfrac{8x^2+x+16}{(x-3)(x^2+4)}$; k) $\dfrac{5x^3+4x^2-x+1}{(x+2)^2(x^2-x+1)}$; l) $\dfrac{x^3-4x^2+4x+4}{(x^2+1)^2}$.

Zadanie 15. Rozłożyć na sumę wielomianu i ułamków prostych daną funkcję wymierną:

a) $\dfrac{x^3+6x^2+5x+3}{(x+1)(x+4)}$; b) $\dfrac{2x^3+7x^2+8x+5}{(x+2)^2}$.

Zadanie 16. Wykorzystując rozkłady na ułamki proste składników poniższej sumy, obliczyć tę sumę:

$$s=\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\ldots+\frac{1}{(x+40)(x+41)}.$$

Liczne przykłady tytułowych rozkładów można znaleźć w tych podręcznikach do analizy matematycznej, w których omawia się całkowanie funkcji wymiernych. Kilka przykładów jest też zamieszczonych na stronach 225-229 w mojej książce „Algebra abstrakcyjna w zadaniach".

Odpowiedzi

3. a) -3; b) 7; c) 3, 8; d) 4; e) $x\in\mathbb{R}\setminus\{3,5,6\}$; f) 6; g) $-5,-8$; h) 7; i) brak rozwiązań; j) 4, 17; k) brak rozwiązań; l) 6; ł) brak rozwiązań; m) 6, 8; n) brak rozwiązań; o) 9. **4.** a) 3, 6; b) $-6,-12$; c) brak rozwiązań; d) 5; e) $x\in\mathbb{R}\setminus\{3,5,7,9\}$; f) brak rozwiązań. **5.** a) -4; b) 1; 2; c) ± 6. **6.** $x\in\langle -3;-1)\cup(-1;2)\cup\langle 7,\infty)$. **8.** $x\in(4;5)$. **9.** a) $x\in\langle 6;13)$; b) $x\in(-\infty,-4)\cap(5;7)$; c) $x\in(-\infty,-1\rangle\cap\langle 2;3)\cup(5,\infty)$;
d) $x\in\langle -3;4\rangle\cup(6;11)$; e) $x\in(-4;-2)\cup(0;1)\cup(7,\infty)$;
f) $x\in(-\infty,-9\rangle\cup\langle -6,-4)\cup(-4,-2)\cup\langle 5,\infty)$. **10.** a) $x\in(1,2)\cup(3,\infty)$; b) $x\in(-\infty,1)\cup(4,7)$; c) $x\in(-5,-2)\cup\langle 0;1)\cup\langle 6,\infty)$; d) $x\in(3;4\rangle\cup(5,6\rangle$. **11.** a) $x\in(-\infty,-4)\cup(7,\infty)$; b) $x\leqslant 17$. **14.** a) $\frac{2}{x-5}-\frac{1}{x+5}$; b) $\frac{4}{x+1}-\frac{3}{x+4}$; c) $\frac{3}{x-1}-\frac{4}{x+1}+\frac{8}{x}$; d) $\frac{1}{x+1}-\frac{5}{x+2}+\frac{8}{x+3}$;

e) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{4}{(x+1)^3}$; f) $\frac{4}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{11}{(x-2)^3}$; g) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x+3}$;

h) $\frac{4}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{4}{x+5}$; i) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x-4} - \frac{1}{(x-4)^2}$; j) $\frac{x+4}{x^2+4} + \frac{7}{x-3}$;

k) $\frac{4}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2} + \frac{x-1}{x^2-x+1}$; l) $\frac{x-4}{x^2+1} + \frac{3x+8}{(x^2+1)^2}$. **15.** a) $x+1+\frac{1}{x+1}-\frac{5}{x+4}$; b) $2x-1+\frac{4}{x+2}+\frac{1}{(x+2)^2}$. **16.** Zachodzą równości:

$$\begin{aligned} s &= \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{x+40}-\frac{1}{x+41}\right) \\ &= \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+41} = \frac{40}{x^2+42x+41}. \end{aligned}$$