Zastosowanie symboli Σ i Π do zapisu sum i iloczynów

Teoria

Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą dowolnymi liczbami. Sumę $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ zapisuje się zazwyczaj w postaci

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

(czytaj: suma od $k = 1$ do n a_k). Znak Σ to duża grecka litera sigma, symbol k to tzw. wskaźnik sumowania, liczba 1 to dolny wskaźnik sumowania, a liczba n to górny wskaźnik sumowania.

Prawdziwe są np. równości:

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55,$$

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{12+6+4+3}{12} = \frac{25}{12}.$$

Wskaźnik sumowania można oznaczać dowolną literą. Mamy np.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{r=1}^{n} a_r.$$

Ponadto wskaźniki sumowania dolny m i górny n mogą być dowolnymi liczbami całkowitymi takimi, że $m \leqslant n$. Mamy np.

$$\sum_{k=4}^{8} (2k+1) = 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 65$$

oraz

$$\sum_{k=-2}^{4} k^3 = (-2)^3 + (-1)^3 + 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 91.$$

Przekształcając wyrażenia zawierające sumy o dowolnej liczbie składników, korzysta się z ważnych własności takich sum. Przedstawimy tu najważniejsze z nich.

Własność 1. Dla dowolnych liczb $a_1, \ldots, a_n, c$ zachodzi równość

$$c \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} c a_k.$$

Powyższa własność wynika z rozdzielności mnożenia względem dodawania liczb.

Własność 2. Dla dowolnych liczb całkowitych r, s, t spełniających warunek $r \leqslant s < t$ zachodzi równość

$$\sum_{k=r}^{t} a_k \quad = \quad \sum_{k=r}^{s} a_k + \sum_{k=s+1}^{t} a_k. \tag{1}$$

Przy powyższych oznaczeniach zachodzą bowiem równości:

$$\sum_{k=r}^{t} a_k = (a_r + \ldots + a_s) + (a_{s+1} + \ldots + a_t) = \sum_{k=r}^{s} a_k + \sum_{k=s+1}^{t} a_k.$$

Własność 3. Dla dowolnych liczb $m, n, r \in \mathbb{Z}$ takich, że $m \leqslant n$ zachodzi równość

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \quad = \quad \sum_{k=m+r}^{n+r} a_{k-r}. \tag{2}$$

Przy powyższych oznaczeniach zachodzą bowiem równości:

$$\sum_{k=m+r}^{n+r} a_{k-r} = a_{(m+r)-r} + a_{(m+r+1)-r} + \ldots + a_{(n+r)-r} =$$

$$= a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n = \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

Rozpatrzmy następującą prostokątną tablicę liczb czyli tzw. macierz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Liczby tworzące tę macierz nazywamy jej elementami. Rzędy poziome tej macierzy nazywamy wierszami, a rzędy pionowe nazywamy kolumnami. Każdy element tej macierzy ma dwa indeksy. Pierwszy jest numerem wiersza, w którym znajduje się ten element, a drugi jest numerem kolumny. Dla każdego $i \in \{1, \ldots, m\}$ suma elementów stojących w i-tym wierszu jest równa

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Wobec tego suma wszystkich elementów macierzy jest równa

$$\sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Big).$$

Podobnie dla każdego $j \in \{1, \ldots, n\}$ suma elementów stojących w j-tej kolumnie jest równa

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij},$$

a suma wszystkich elementów naszej macierzy jest równa

$$\sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \Big).$$

Porównując otrzymane sumy i opuszczając nawiasy, otrzymujemy poniższą

Własność 4. Dla dowolnych liczb naturalnych m i n oraz liczb a_{ij}, gdzie $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ zachodzi równość

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}. \tag{3}$$

Powyższy związek można wyrazić następująco: w sumach podwójnych można zmieniać kolejność sumowania. Własność tę mają również sumy potrójne i ogólnie l-krotne, gdzie $l \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Iloczyn $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ zapisujemy w postaci

$$\prod_{k=1}^{n} a_k$$

(czytaj: iloczyn od $k = 1$ do n a_k). Znak Π to duża grecka litera pi, symbol k to tzw. wskaźnik iloczynu, liczba 1 to dolny wskaźnik iloczynu, a liczba n to górny wskaźnik iloczynu.

Mamy np.

$$\prod_{k=1}^{7} (3k+1) = 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 16 \cdot 19 \cdot 22.$$

Prawdziwe są odpowiedniki iloczynowe podanych wyżej własności 1, 2, 3 i 4.

Zadania na zajęcia

Zadanie 1. Obliczyć:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} 2^k$;   b) $\displaystyle\sum_{j=4}^{6} \frac{1}{j}$.

Zadanie 2. Za pomocą znaku Σ zapisać następującą sumę:

a) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \sqrt[5]{5} + \sqrt[6]{6} + \sqrt[7]{7} + \sqrt[8]{8}$;

b) $5! + 6! + 7! + 8! + 9!$.

Zadanie 3. Dana jest macierz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Zapisać dane wyrażenie bez użycia symboli Σ i Π:

a) $\displaystyle\prod_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij}$;   b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} \prod_{i=1}^{3} a_{ij}$;   c) $\displaystyle\prod_{j=1}^{3} \sum_{i=4-j}^{3} a_{ij}$.

Zadania domowe

Zadanie 4. Obliczyć:

a) $\sum_{k=1}^{7}(2k-1)$; b) $\sum_{i=2}^{5}\frac{i}{i+1}$; c) $\sum_{i=2}^{8}(-1)^k k^2$.

Zadanie 5. Za pomocą znaku Σ zapisać następującą sumę:

a) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$;

b) $a + (a+1)^2 + (a+2)^3 + \ldots + (a+2n)^{2n+1}$.

Zadanie 6. Za pomocą znaku Π zapisać następujący iloczyn $3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 100$.

Zadanie 7. Sformułować i uzasadnić iloczynowe odpowiedniki własności 1, 2, 3 i 4.

Zadanie 8. Dana jest macierz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Zapisać dane wyrażenie bez użycia symboli Σ i Π:

a) $\sum_{i=1}^{3}\prod_{j=1}^{3} a_{ij}$; b) $\prod_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} a_{ij}$; c) $\sum_{i=1}^{3}\prod_{j=1}^{i} a_{ij}$; d) $\prod_{j=1}^{3}\sum_{i=j}^{3} a_{ij}$;

e) $\sum_{i=1}^{3}\prod_{j=i}^{3} a_{ij}$; f) $\prod_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{j} a_{ij}$; g) $\sum_{i=1}^{3}\prod_{j=1}^{4-i} a_{ij}$; h) $\prod_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{4-i} a_{ij}$;

i) $\sum_{i=1}^{3}\prod_{j=4-i}^{3} a_{ij}$; j) $\prod_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{i} a_{ij}$; k) $\sum_{j=1}^{3}\prod_{i=j}^{3} a_{ij}$; l) $\prod_{i=1}^{3}\sum_{j=4-i}^{3} a_{ij}$;

ł) $\sum_{j=1}^{3}\prod_{i=1}^{j} a_{ij}$; m) $\prod_{i=1}^{3}\sum_{j=i}^{3} a_{ij}$; n) $\sum_{j=1}^{3}\prod_{i=1}^{4-j} a_{ij}$; o) $\prod_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4-i} a_{ij}$.

Zadanie 9. Dana jest macierz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$. Dane wyrażenie zapisać za pomocą symboli Σ i Π:

a) $(a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14})(a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24})(a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34})$;
b) $(a_{11} + a_{21} + a_{31})(a_{12} + a_{22} + a_{32})(a_{13} + a_{23} + a_{33})(a_{14} + a_{24} + a_{34})$;
c) $a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} + a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} + a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}$;
d) $a_{11}a_{21}a_{31} + a_{12}a_{22}a_{32} + a_{13}a_{23}a_{33} + a_{14}a_{24}a_{34}$.

Zadanie 10. Dana jest następująca trójkątna tablica liczb:

$$\begin{array}{lllll} a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{array}$$

Sumując dwoma sposobami elementy tej tablicy, wykazać równość

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij}$$

Zadanie 11. Dana jest następująca tablica liczb:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & a_{1n} \\ & & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{array}$$

Sumując dwoma sposobami elementy tej tablicy, wykazać odpowiednią równość.

Indukcja matematyczna

Zasadę indukcji matematycznej (lub też indukcji zupełnej) stosuje się w dowodach licznych twierdzeń.

Twierdzenie 1 (Zasada indukcji matematycznej)**.** *Niech każdej liczbie naturalnej n przyporządkowane będzie zdanie $T(n)$ i niech spełnione będą warunki:*
1^o. *zdanie $T(1)$ jest prawdziwe,*
2^o. *dla każdej liczby naturalnej n ze zdania $T(n)$ wynika zdanie $T(n+1)$.*
Wówczas zdanie $T(n)$ jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n.

Zasadę indukcji matematycznej można sugestywnie zilustrować za pomocą odpowiednio ustawionych tabliczek domina.

Zadania na zajęcia

Zadanie 12. Stosując zasadę indukcji matematycznej, wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1). \tag{4}$$

Zadanie 13. Za pomocą indukcji matematycznej wykazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1}(2k-1)^3 = -2n(16n^2-3). \tag{5}$$

Zadanie 14. Wykazać, że dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ zachodzi równość

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}. \tag{6}$$

Zadanie 15. Wykazać, że dla każdego $n \geqslant 3$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \quad > \quad \frac{3}{5}. \tag{7}$$

Zadanie 16. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwy jest związek $41 \mid (5 \cdot 7^{2n} + 8^{n-1})$.

Zadanie 17. Wykazać, że dla każdego $n \geqslant 3$ liczba P_n wszystkich przekątnych n-kąta wypukłego jest równa $n(n-3)/2$.

Zadanie 18. Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \quad = \quad \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1). \tag{8}$$

Zadanie 19. Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(7k-3)(7k+4)} \quad = \quad \frac{n}{4(7n+4)}. \tag{9}$$

Zadanie 20. Metodą indukcji zupełnej wykazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx \quad = \quad \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \, \sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}, \qquad (x \neq 2k\pi). \tag{10}$$

Uwaga. Tego typu zadania można przerabiać w ramach kursu trygonometrii.

Zadanie 21. Wykazać, że jeśli $x \geqslant -1$, to dla każdej liczby naturalnej n zachodzi poniższa nierówność, zwana nierównością Bernoulliego

$$(1+x)^n \quad \geqslant \quad 1 + nx. \tag{11}$$

Zadanie 22. Metodą indukcji zupełnej wykazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ prawdziwy jest związek

$$(X^2 + X + 1) \,|\, [(X+1)^{2n+1} + X^{n+2}]. \tag{12}$$

Zadanie 23. Poniższą równość zapisać za pomocą znaków Σ i udowodnić ją przez indukcję:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Zadania domowe

Zadanie 24. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(10k-3) = n(5n+2);$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2);$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+2)(3k+1) = n(n+2)(n+3);$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2;$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(5k-4)(5k+1)} = \frac{n}{5n+1};$

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$

g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}k^3 = -n^2(4n+3);$

Zadanie 25. Metodą indukcji matematycznej wykazać równość:

a) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, \qquad (n \geqslant 2).$

Zadanie 26. Wykazać równość:

a) $\displaystyle\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \ldots + \left(x^n - \frac{1}{x^n}\right)^2 = \frac{1}{x^2-1}\left(x^{2n+2} - \frac{1}{x^{2n}}\right) - 2n - 1;$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos kx}{\cos^k x} = \frac{\sin(n+1)x}{\cos^n x \, \sin x}, \qquad (x \neq \frac{1}{2}k\pi).$

Zadanie 27. Metodą indukcji matematycznej wykazać nierówność:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1.$$

Zadanie 28. Udowodnić związek $25 \mid (2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4)$.

0.1. Zasada minimum (*nadprogramowe!)*

Poniższe twierdzenie jest równoważne z zasadą indukcji matematycznej.

Twierdzenie 2 (Zasada minimum.). *W każdym niepustym podzbiorze zbioru $\mathbb{N}$ liczb naturalnych istnieje liczba najmniejsza.*

Zadanie 29. Stosując zasadę minimum, wykazać, że każda liczba naturalna $n > 1$ jest iloczynem liczb pierwszych. (Pojedynczą liczbę pierwszą traktujemy tu jako jednoczynnikowy iloczyn liczb pierwszych.)

Zadanie 30. „Udowodnić" następujące „twierdzenie": każda liczba naturalna jest ciekawa. *Uwaga.* Poniżej dla każdej spośród liczb naturalnych od 1 do 8 wskazujemy własność świadczącą o tym, że dana liczba naturalna jest ciekawa:

1 – najmniejsza liczba naturalna, jedyna liczba naturalna, która nie jest ani liczbą pierwszą, ani liczbą złożoną,

2 – najmniejsza liczba pierwsza,

3 – najmniejsza liczba pierwsza nieparzysta; najmniejsza liczba naturalna, która nie jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych,

4 – najmniejsza liczba złożona,

5 – najmniejsza liczba naturalna będąca sumą kwadratów dwóch różnych liczb naturalnych,

6 – najmniejsza liczba naturalna będąca iloczynem dwóch różnych liczb pierwszych,

7 – najmniejsza liczba naturalna niebędąca sumą kwadratów trzech liczb całkowitych,

8 – najmniejsza liczba naturalna będąca sześcianem liczby pierwszej.

0.2. Symbol Newtona

Dla każdej liczby naturalnej n liczbę $n!$ (czytaj: n silnia) określamy wzorem

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

Przyjmujemy ponadto umowę, że $0! = 1$. W szczególności mamy

$$1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \quad 6! = 720, \quad 7! = 5040.$$

Dla każdej liczby naturalnej n i dowolnej liczby całkowitej k takiej, że $0 \leqslant k \leqslant n$ wartość $\binom{n}{k}$ (czytaj: n po k) symbolu Newtona określamy wzorem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Przyjmujemy ponadto umowę, że jeśli $n \in \mathbb{N}$ i k jest liczbą całkowitą ujemną, to $\binom{n}{k} = 0$.

Dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ i $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ liczba $\binom{n}{k}$ jest równa liczbie wszystkich k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego. Ponieważ liczba wszystkich podzbiorów zbioru n-elementowego jest równa 2^n, więc zachodzi równość

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n. \tag{13}$$

Zadania na zajęcia

Zadanie 31. Sprawdzić, że jeśli $0 \leqslant k \leqslant n$, to zachodzi równość

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \text{(symetria).} \tag{14}$$

Zadanie 32. Obliczyć:

a) $\binom{16}{3}$; b) $\binom{11}{4}$; c) $\binom{28}{5}$; d) $\binom{57}{49}$.

Zadanie 33. Wykazać, że jeśli $k, n \in \mathbb{N}$ i $1 \leqslant k \leqslant n$, to zachodzi równość

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}. \tag{15}$$

0.3. Wzór dwumianowy Newtona

Dobrze znamy poniższe wzory na kwadrat sumy i sześcian sumy:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \end{aligned}$$

Ich uogólnieniem jest poniższy tzw. wzór dwumianowy Newtona zachodzący dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \tag{16}$$

Równość (16) można też zapisać następująco

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n. \tag{17}$$

Zadania na zajęcia

Zadanie 34. Metodą indukcji matematycznej udowodnić wzór (16).

Uwaga. Nie wyprowadza się oddzielnego wzoru dla $(a-b)^n$, gdyż różnica $a-b$ też jest sumą. Mianowicie $a - b = a + (-b)$.

Zadanie 35. Rozpatrując wyrażenie $(1+1)^n$, wykazać w sposób algebraiczny równość (13).

0.4. Trójkąt Pascala

Współczynniki występujące w rozwinięciach kolejnych potęg dwumianu można ustawić w formie poniższej tablicy zwanej trójkątem Pascala

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

. . . .

Trójkąt Pascala jest więc następujący

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

. . . .

Na początku i końcu każdego wiersza stoi liczba 1. Każdy inny współczynnik jest na mocy równości (15) równy sumie dwóch współczynników stojących tuż nad nim.

Zadania na zajęcia

Zadanie 36. Korzystając z trójkąta Pascala, rozwinąć wyrażenie:

a) $(a+b)^4$; b) $(a+b)^5$.

Zadania domowe

Zadanie 37. Korzystając z trójkąta Pascala, rozwinąć wyrażenie $(a+b)^6$.

0.5. Pewne wzory skróconego mnożenia

Kolejnymi znanymi nam tożsamościami algebraicznymi są równości:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b), \\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2). \end{aligned}$$

Ich uogólnieniem jest zachodząca dla każdego $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ równość

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Mamy np.

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + \ldots + ab^3 + b^4).$$

Zauważmy, że jeśli liczba naturalna $n > 1$ jest nieparzysta, to z powyższej tożsamości oraz ze związku $a^n + b^n = a^n - (-b)^n$ otrzymujemy równość

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Mamy np.

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2), \\ a^5 + b^5 &= (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^2). \end{aligned}$$

Literatura

Jeśmianowicz L. i Łoś J. – „Zbiór zadań z algebry”, Warszawa, PWN
Musielak J. – „Wstęp do matematyki”, Warszawa, PWN

Odpowiedzi

1. a) 62; b) $\frac{37}{60}$. **2.** a) Na przykład $\sum_{k=2}^{8} \sqrt[k]{k}$; b) np. $\sum_{k=5}^{9} k!$. **4.** a) 49; b) $\frac{61}{20}$ c) 37. **5.** a) Na przykład $\sum_{k=1}^{n} \sin kx$; b) np. $\sum_{k=0}^{2n} (a+k)^{k+1}$. **6.** Na przyklad $\prod_{k=3}^{100} k$. **8.** a) $a_{11}a_{12}a_{13} + a_{21}a_{22}a_{23} + a_{31}a_{32}a_{33}$;
b) $(a_{11} + a_{21} + a_{31})(a_{12} + a_{22} + a_{32})(a_{13} + a_{23} + a_{33})$;
c) $a_{11} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32}a_{33}$;
d) $(a_{11} + a_{21} + a_{31})(a_{22} + a_{32})a_{33}$;
e) $a_{11}a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{33}$;
f) $a_{11}(a_{12} + a_{22})(a_{13} + a_{23} + a_{33})$;
g) $a_{11}a_{12}a_{13} + a_{21}a_{22} + a_{33}$;
h) $(a_{11} + a_{21} + a_{31})(a_{12} + a_{22})a_{13}$;
i) $a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{31}a_{32}a_{33}$;
j) $a_{11}(a_{21} + a_{22})(a_{31} + a_{32} + a_{33})$;
k) $a_{11}a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{33}$;
l) $a_{13}(a_{22} + a_{23})(a_{31} + a_{32} + a_{33})$;
ł) $a_{11} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23}a_{33}$;
m) $(a_{11} + a_{12} + a_{13})(a_{22} + a_{23})a_{33}$;
n) $a_{11}a_{21}a_{31} + a_{12}a_{22} + a_{13}$;

o) $(a_{11} + a_{12} + a_{13})(a_{21} + a_{22})a_{31}$. **9.** a) $\prod_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} a_{ij}$; b) $\prod_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3} a_{ij}$; c) $\sum_{i=1}^{3}\prod_{j=1}^{4} a_{ij}$; d) $\sum_{j=1}^{4}\prod_{i=1}^{3} a_{ij}$. **11.** $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n-i+1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=n-j+1}^{n} a_{ij}$. **32.** a) 560; b) 330; c) 98 280; d) 1 652 411 475. **36.** a) $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$;
b) $(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$. **37.** $(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$.