Równania i nierówności wykładnicze i logarytmiczne

Paweł Foralewski

Teoria

Ponieważ funkcje wykładnicza i logarytmiczna zostały wprowadzone wcześniej, tutaj przypomnimy tylko definicję logarytmu i jego podstawowe własności.

Definicja 1. Niech a i b będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi i niech $a \neq 1$. Logarytmem liczby b przy podstawie a nazywamy liczbę x spełniającą równanie $a^x = b$. Piszemy wtedy $x = \log_a b$.

Twierdzenie 1. *Dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, $a \neq 1$, mamy:*
(a) $\log_a 1 = 0$,
(b) $\log_a a^b = b$,
(c) $a^{\log_a b} = b$,
(d) $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$,
(e) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$,
(f) $\log_a b^k = k \log_a b$ *dla dowolnego* $k \in \mathbb{R}$,
(g) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, $c \neq 1$.

Zadania na zajęcia

Szanowni Państwo, zgodnie z sugestiami w zadaniach 1 i 2 dodałem po jednym łatwym przykładzie (podpunkty a). Zdaję sobie sprawę, że w związku z ilością godzin przeznaczonych w repetytorium na równania i nierówności wykładnicze i logarytmiczne, zadań obowiązkowych może być za dużo. Z drugiej strony każde z nich jest inne, wymaga zastosowania innej metody postępowania (nie byłem tutaj zbyt oryginalny i częściowo wykorzystałem materiały ze starego repetytorium), więc nie chciałbym żadnego z nich wyrzucać. Proponuję zatem, aby do słowa „obowiązkowe" podeszli Państwo w tym przypadku z pewnym dystansem i ilość rozwiązanych na zajęciach zadań obowiązkowych uzależnili od swojego wyczucia, możliwości grupy itd. itp.

Zadanie 1. Rozwiąż równania:

a) $3^{x+1} = 81$

b) $8^{3x-5} - 0,125\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{6-5x} = 0$,

c) $2 \cdot 16^x - 17 \cdot 4^x = -8$,

d) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{11-x} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{3x-1}$,

e) $15^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 5^{4x-4}$.

Zadanie 2. Rozwiąż równania:

a) $\log_3(x-5) = 2$

b) $\log_{x-2}(x^3 - 14) = 3$,

c) $\log_5(x^2 - 1) - \log_5(x+1) = 3$,

d) $x^{\log_2 \sqrt{x} - 1} = \sqrt{8}$,

e) $5 \log_3 x - 2 \log_9 x = 12$.

Zadanie 3. Rozwiąż nierówności:

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^{4x} < \frac{1}{64}$,

b) $4^{x+\frac{1}{2}} - 5 \cdot 2^x > -2$,

c) $\log_7 \log_{\frac{2}{3}}(x+11) > 0$,

d) $\log_x \left(x^3 - \frac{1}{4}x\right) \leqslant 1$.

Zadanie 4. Rozwiąż równania:

a) $8^{7x+5} - (\sqrt[3]{4})^{9-x} = 0$,

b) $(0,125)^x \cdot (\sqrt{2})^{x+1} = \left(\frac{4}{\sqrt[3]{2}}\right)^{3x}$,

c) $4^{x+1} - 5 \cdot 2^{x+1} + 4 = 0$,

d) $4^{\sqrt[4]{x+23}} = 10 \cdot 2^{\sqrt[4]{x+23}} - 16$,

e) $(\sqrt[3]{7})^{2-3x} = \frac{1}{25} 5^{3x}$,

f) $4^{x+1} + 3 \cdot 5^{2x} = 5^{2x+1} - 4^x$.

Zadanie 5. Rozwiąż równanie

$$2^{x-1} + 2^{x-2} + \ldots = \sqrt{3 \cdot 2^{x+1} - 8}.$$

.

Zadanie 6. Rozwiąż równania:

a) $\log_{x+5} 9 = 2$,

b) $\log_4[\log_3(\log_2 x)] = 0$,

c) $1 - \log\sqrt{x-5} + \log\sqrt{2x-3} = \log 30$,

d) $\log(x+6) - 2 = \frac{1}{2}\log(2x-3) - \log 25$,

e) $x^{\log x} = 100x$,

f) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$.

Zadanie 7. Rozwiąż równania:

a) $\log|2x-3| - \log|3x-2| = 1$,

b) $\log\sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} + \ldots} = \log(4x-15)$.

Zadanie 8. Rozwiąż nierówności:

a) $0,25^{x^2} \cdot 2^{x+1} \geqslant 1$,

b) $3 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 9 \leqslant 0$,

c)$\log_8 \log_3 x \leqslant \frac{1}{3}$,

d) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) - \log_{\frac{1}{3}}(x+1) < 2$,

e) $\log_{x+4} x > -1$.

Zadanie 9. Rozwiąż nierówność

$$2\log x + 4\log^2 x + 8\log^3 x + \ldots < \log^2 x.$$

Zadania domowe

Zadanie 10. Rozwiąż równania:

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{9}{16}$,

b) $5^{x^2+2} = 5^{3x}$,

c) $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$,

d) $\frac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}} = 5$,

e) $2^{3x} \cdot 7^{x-2} = 4^{x+1}$,

f) $6^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$.

Zadanie 11. Rozwiąż równania:

a) $\log_{3-x} 2(x^2 + 2x - 1) = 2$

b) $\log_3^2 x - \log_3 x^3 + 2 = 0$

c) $\frac{\log(\log x)}{\log(\log x^2-1)} = 2$

d) $\log\left(x + \frac{1}{2}\right) = \log\frac{1}{2} - \log x$

e) $\log_{2\cos x}(9 - x^2) = 0$,

f) $x + \log(5 - 2^{x+1}) - x\log 5 - \log 2 = 0$.

Zadanie 12. Rozwiąż nierówności:

a) $5^{\frac{x+1}{x}} > \sqrt{5}$,

b) $2^{3x} + 2^{2x+1} - 2^x - 2 < 0$

c) $\log_4(x + 3) - \log_4(x - 1) \geqslant 2 - \log_4 8$

d) $\log_{2x-3} x > 1$.

Literatura

(a) N. Dróbka, K. Szymański, Zbiór zadań z matematyki dla klasy III i IV liceum ogólnokształcącego, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1973;

(b) R. Kowalczyk, K. Niedziałomski, C. Obczyński, Matematyka dla studentów i kandydatów na wyższe uczelnie. Repetytorium, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012;

(c) W. Leksiński, B. Macukow, W. Żakowski, Matematyka w zadaniach. Dla kandydatów na wyższe uczelnie, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1987;

(d) J. Uryga, Nowa matura. Matematyka. Rozwiązywanie zadań, ParkEdukacja Nauka bez tajemnic, 2008.

Wskazówki

1. W podpunkcie a) zapisz 81 jako 3^4, w podpunkcie b) sprowadź potęgi w równaniu do tych samych podstaw, z kolei w podpunkcie c) jako wspólną podstawę przyjmij 4 i podstaw $t = 4^x$, w podpunkcie d) kluczową rolę odgrywa tożsamość $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 1$, na koniec w podpunkcie e) zapisz liczbę 15 jako $3 \cdot 5$ i rozdziel potęgi o podstawie 3 i o podstawie 5. **2.** Uwaga ogólna: pamiętaj o wyznaczeniu dziedziny równania. Ponadto, w podpunktach a) i b) skorzystaj z definicji logarytmu, podobnie w podpunkcie c) korzystając najpierw ze wzoru e) z Twierdzenia 1, w podpunkcie d) zlogarytmuj obie strony równania przy podstawie 2, dwa razy wykorzystaj wzór f) z Twierdzenia 1 i w końcu podstaw $t = \log_2 x$, w podpunkcie e) wykorzystaj wzór g) z Twierdzenia 1 **3.** Uwaga ogólna: pamiętaj, że funkcje $f(x) = a^x$ oraz $g(x) = \log_a x$ są rosnące dla $a > 1$ oraz malejące kiedy $a \in (0, 1)$. W podpunkcie a) sprowadź potęgi do tej samej podstawy, w b) podstaw $t = 2^x$, w c) skorzystaj dwukrotnie z definicji logarytmu, a w d) rozważ dwa przypadki w zależności od x. Oczywiście, w podpunktach c) i d) wyznacz najpierw dziedziny nierówności. **4.** Powyższe równania można rozwiązać analogicznie jak odpowiednie równania z Zadania 1 **5.** Najpierw wyrażenie po lewej stronie przekształcamy wykorzystując wzór na sumę zbieżnego szeregu geometrycznego nieskończonego, potem podnosimy obie strony równania do kwadratu i w końcu rozwiązujemy równanie postępując analogicznie jak w Zadaniu 1 b) **6.** Powyższe równania można rozwiązać analogicznie jak odpowiednie równania z Zadania 2. **7.** W pierwszym równaniu należy najpierw „opuścić znaki wartości bezwzględnej" i rozważyć odpowiednie przypadki, natomiast w równaniu drugim należy najpierw skorzystać ze wzoru na sumę zbieżnego szeregu geometrycznego nieskończonego. **8.** Powyższe nierówności można rozwiązać analogicznie jak odpowiednie nierówności z Zadania 3. **9.** Aby tradycji stało się zadość, także w tym zadaniu należy wykorzystać wzór na sumę zbieżnego szeregu geometrycznego nieskończonego.

Odpowiedzi

1. a) $x = 3$, b) $x = 2$, c) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{3}{2}$, d) $x = -5$, e) $x = 4$. **2.** a) $x = 14$, b) $x = 1 + \sqrt{2}$, c) $x = 126$, d) $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 8$, e) $x = 27$. **3.** a) $x \in (\frac{3}{4}, \infty)$, b) $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, c) $x \in (-11, -10\frac{1}{3})$, d) $x \in (1, \frac{\sqrt{5}}{2}]$. **4.** a) $x = -\frac{27}{65}$, b) $x = \frac{1}{15}$, c) $x = 1$ lub $x = -1$, d) $x = -22$ lub $x = 58$, e) $x = \frac{2}{3}$, f) $x = \frac{1}{2}$. **5.** $x = 1$ lub $x = 2$. **6.** a) $x = -2$, b) $x = 8$, c) $x = 6$, d) $x = 6$ lub $x = 14$, e) $x = 0,1$ lub $x = 100$, f) x=16. **7.** $x = \frac{17}{28}$ lub $x = \frac{23}{32}$, b) $x = 5$. **8.** a) $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, b) $x \in [-1, 2]$, c) $x \in (0, 9]$, d) $x \in \left(\frac{5}{4}, \infty\right)$, e) $x \in (-2 + \sqrt{5}, \infty)$. **9.** a) $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 1\right)$. **10.** a) $x = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ lub $x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$, b) $x = 1$ lub $x = 2$, c) $x = 2$, d) $x = \log_{10}\sqrt{\frac{3}{2}}$, e) $x = 2$, f) $x = 4$. **11.** a) $x = 1$ lub $x = -11$, b) $x = 3$ lub $x = 9$, c) brak rozwiązań, d) $x = \frac{1}{2}$, e) brak rozwiązań, f) $x = 1$ lub $x = -1$. **12.** a) $x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$, b) $x \in (-\infty, 0)$, c) $x \in (-\infty, 1) \cup [5, \infty)$, d) $x \in (2, 3)$.