

Teoria

Definicja 1. Wartością bezwzględną liczby $a \in \mathbb{R}$ nazywamy liczbę $|a|$ określoną wzorem

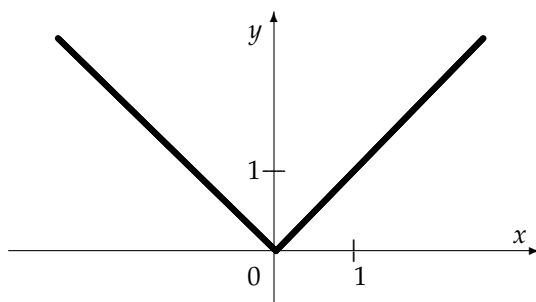
$$|a| = \begin{cases} a, & \text{jeśli } a \geq 0, \\ -a, & \text{jeśli } a < 0. \end{cases}$$

Zgodnie z powyższym określeniem liczba $|a|$ jest równa odległości liczby a od liczby 0 na osi liczbowej.

Przykłady. Zachodzą równości: $|7| = 7$, $|-5| = 5$, $|4 - \sqrt{17}| = \sqrt{17} - 4$.

Przyporządkowanie $x \mapsto |x|$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, określa pewną funkcję. Oznaczamy ją symbolem $||$. Mamy tu $|| : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Ponieważ $|x| = |-x|$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, więc funkcja $||$ jest parzysta. Wykres funkcji $||$ jest następujący:



Twierdzenie 1. Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzą równości:

$$|ab| = |a| |b|, \quad (1)$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0). \quad (2)$$

Warto zapamiętać, że dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$\sqrt{a^2} = |a|. \quad (3)$$

Twierdzenie 2. Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzą nierówności

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|. \quad (4)$$

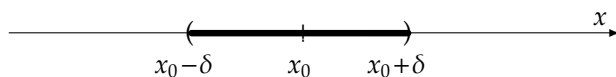
Z pojęciem bezwzględnej wartości liczby blisko związane są podstawowe w analizie matematycznej pojęcia otoczenia i sąsiedztwa punktu na prostej.

Otoczeniem punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy każdy z przedziałów $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, gdzie δ przebiega zbiór $\mathbb{R}^+$ liczb rzeczywistych dodatnich.

Zauważmy, że

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}.$$

Pojęcie otoczenia punktu na prostej ilustruje rysunek:

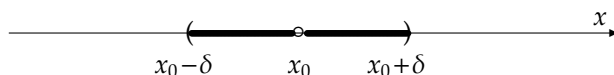


Podobnie sąsiedztwem punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy każdy ze zbiorów $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, gdzie δ przebiega zbiór $\mathbb{R}^+$.

Zauważmy, że

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta\}.$$

Oto rysunek ilustrujący pojęcie sąsiedztwa punktu:



Równania z wartością bezwzględną

Zadania na zajęcia

Zadanie 1. Rozwiązać równanie $|x - 3| = 1$.

Zadanie 2. Rozwiązać równanie $4x + |x - 6| = 9$.

Zadanie 3. Rozwiązać równanie

$$|x - 4| + |x - 5| + |x - 9| = 15. \quad (5)$$

Zadanie 4. Rozwiązać równanie $|x + 5| + |x + 13| = 8$.

Zadanie 5. Rozwiązać równanie $|x - 5| + |x + 9| = 11$.

Zadanie 6. Rozwiązać równanie $||x - 5| - 1| = 1$.

Zadania domowe

Zadanie 7. Rozwiązać równanie:

a) $|x - 7| = 1$;

b) $|x + 4| = 9$;

c) $|x + 6| = 0$;

d) $|x - 5| = -3$.

Zadanie 8. Rozwiązać równanie:

a) $x + |3x - 4| = 20$;

b) $5x + |2x - 9| = -12$;

c) $2x + |5x - 1| = 13$;

d) $4x + |2x - 7| = 5$;

e) $x + |x - 4| = 4$;

f) $x + |x - 6| = 3$;

g) $6x + |4x - 11| = 39$;

h) $x - |x - 7| = 7$.

Zadanie 9. Rozwiązać równanie:

a) $|x - 6| + |x + 3| = 11$;

b) $|x - 4| + |x + 7| = 13$;

c) $|x - 4| + |x - 7| = 7$;

d) $|x - 4| + |x + 11| = 15$;

- e) $|x - 3| + |x - 5| + |x - 7| = 5$; f) $|x - 1| + |x - 6| + |x + 4| = 12$;
 g) $|x - 5| + 2|x - 2| + 3|x - 1| = 6$; h) $|x - 3| + |x - 7| + |2x - 9| = 5$;
 i) $|x - 1| + |x - 7| - 2|x - 5| = 2$; j) $|x + 5| - |x + 1| + 3|x - 4| = 10$;
 k) $|x - 1| + |x - 3| + |x - 7| + |x - 11| = 14$.

Zadanie 10. Rozwiązać równanie:

- a) $|x^2 - 10x + 15| = 6$; b) $|x^2 - 8x + 3| = 12$.

Zadanie 11. Rozwiązać równanie:

- a) $||x + 2| - 2| = 7$; b) $||x - 5| - 7| = 3$;
 c) $||x + 4| - 8| = 1$; d) $||x - 3| - 5| = 5$;
 e) $||x - 4| - 9| = 6$.

Zadanie 12. Rozwiązać równanie:

- a) $||x - 4| + |x - 2| - |x + 1|| = 2$; b) $||x - 3| + |x - 5| - |2x - 4|| = 4$.

Nierówności z wartością bezwzględną

Zadania na zajęcia

Zadanie 13. Zinterpretować geometrycznie i rozwiązać nierówność $|x - 4| < |x - 10|$.

Zadanie 14. Zinterpretować geometrycznie i rozwiązać nierówność:

- a) $\bullet |x| \leq 4$; b) $\bullet |x - 5| < 2$; c) $\bullet |x + 6| \geq 3$;
 d) $\bullet |x - 3| > 1$; e) $\bullet |x + 4| > |x - 6|$; f) $\bullet |x + 1| \leq |x - 9|$.

Zadanie 15. Rozwiązać nierówność

$$|x + 1| + |x - 4| < 11. \quad (6)$$

Zadanie 16. Rozwiązać nierówność: a) $\bullet 2|x + 2| - |x - 6| > 1$;

b) $\bullet |x| + |x + 2| + |x + 4| > 9$;

Zadanie 17. Rozwiązać nierówność

$$\left| \frac{x - 3}{x + 1} \right| < \frac{1}{3}. \quad (7)$$

Zadania domowe

Zadanie 18. Rozwiązać nierówność:

- a) $|x - 4| + |x - 11| \leq 13$; b) $|x + 3| - |x - 7| > 8$;

c) $|x - 13| - |2x - 5| \geq 9$;

d) $2|x - 1| - |x + 2| - |x - 5| \geq 1$.

Zadanie 19. Rozwiązać nierówność:

a) $\left| \frac{x+5}{x-3} \right| < 3$;

b) $\left| \frac{x-3}{x-6} \right| \leq 2$;

c) $\left| \frac{x-2}{x+1} \right| < \frac{1}{2}$;

d) $\left| \frac{x+5}{7x+11} \right| < 1$;

e) $\left| \frac{4x-1}{x-4} \right| < 1$;

f) $\left| \frac{3x+5}{5x+3} \right| < 1$.

Wskazówki

6. Wprowadzić niewiadomą pomocniczą $t = |x - 5|$.

Odpowiedzi

3. $x = 1$ lub $x = 11$. 4. $x \in \langle -13, -5 \rangle$. 5. Brak rozwiązań. 6. $x \in \{3; 5; 7\}$. 7. a) $x = 6$ lub $x = 8$; b) $x = -13$ lub $x = 5$; c) $x = -6$; d) brak rozwiązań. 8. a) $x = -8$ lub $x = 6$; b) $x = -7$; c) $x = -4$ lub $x = 2$; d) $x = -1$; e) $x \in (-\infty, 4)$; f) brak rozwiązań; g) $x = 5$; h) $x \in \langle 7, \infty \rangle$. 9. a) $x \in \{-4; 7\}$; b) $x \in \{-8; 5\}$; c) $x \in \{2; 9\}$; d) $x \in \langle -11; 4 \rangle$; e) $x \in \{4; 6\}$; f) $x = -1, 3$; g) $x \in \langle 1, 2 \rangle$; h) $x \in \{4, 5\}$; i) $x \in \{3\} \cup \langle 7, \infty \rangle$; j) $x \in \{2; 6\}$; k) $x \in \langle 3, 7 \rangle$. 10. a) $x \in \{1; 3; 7; 9\}$; b) $x \in \{-1; 3; 5; 9\}$. 11. a) $x \in \{-11; 7\}$; b) $x \in \{-5; 1; 9; 15\}$; c) $x \in \{-13; -11; 3; 5\}$; d) $x \in \{-7; 3; 13\}$; e) $x \in \{-11; 1; 7; 19\}$. 12. a) $x \in \{1; 3; 5; 9\}$; b) $x \in (-\infty, 2) \cup (5, \infty)$. 14. a) $x \in \langle -4; 4 \rangle$, nierówność spełniają liczby odległe od liczby 0 o co najwyżej 4;
b) $x \in (3; 7)$, nierówność spełniają liczby odległe od liczby 5 o mniej niż 2;
c) $x \in \langle -\infty, -9 \rangle \cup (-3, \infty)$, nierówność spełniają liczby odległe od liczby -6 o przynajmniej 3;
d) $x \in (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$, nierówność spełniają liczby odległe od liczby 3 o więcej niż 1;
e) $x \in (1, \infty)$, nierówność spełniają liczby, których odległość od liczby -4 jest większa niż odległość od liczby 6;
f) $x \in (-\infty, 4)$, nierówność spełniają liczby, których odległość od liczby -1 nie jest większa niż odległość od liczby 9. 16. a) $x \in (-\infty; -11) \cup (1; \infty)$; b) $x \in (-\infty; -5) \cup (1; \infty)$. 19. a) $x \in (-\infty, 1) \cup (7, \infty)$; b) $x \in (-\infty, 5) \cup (9, \infty)$; c) $x \in (1; 5)$; d) $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$; e) $x \in (-1; 1)$; f) $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.