Równania i nierówności trygonometryczne

Piotr Rzonsowski

Zadania na zajęcia

Zadanie 1. Obliczyć równania:

a) $\cos 4x = -1,$ b) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3},$

c) $\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}) = 0,$ d) $\sin x = -\frac{1}{2}.$

Zadanie 2. Rozwiązać równania:

a) $4\cos^2 x + 4\sin x = 5$ b) $\sin x + \cos x = 0$

c) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$ d) $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$

Zadanie 3. Rozwiązać równania: $|\sin x| + \sin x = 0$;

Zadanie 4. Rozwiązać nierówności:

a) $\sin x > \frac{1}{2}$ b) $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$

c) $\sin x + \cos x > 0$ d) $\cos^2 x - 5\cos x < 0$

Zadanie 5. Rozwiązać równanie $\sin x + \cos x = 1$

Zadanie 6. Znajdź w zależności od wartości parametru m liczbę rozwiązań równania $\sin x = m$, w przedziale $[-2\pi, 2\pi]$.

Zadanie 7. Rozwiązać równanie $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$.

Zadania domowe

Zadanie 8. Rozwiązać równania:

a) $\sin 3x = \sin 2x$ b) $\sin x + \cos 3x - \sin 5x = 0$

c) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ d) $\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} = 0$

Zadanie 9. Rozwiązać nierówności:

a) $\sin x \cos x < \frac{1}{4}$ b) $\operatorname{tg} 2x > \operatorname{tg} x$

c) $|\sin 2x| < \frac{1}{2}$ d) $|\sin x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Literatura

Literatura

Literatura

— M. Kurczab, E. Kurczab, E.Świda, Matematyka Podręcznik do liceów i techników klasa 1, Oficyna Edukacyjna, 2010.
— M. Kurczab, E. Kurczab, E.Świda, Matematyka Zbiór zadań do liceów i techników klasa 1, Oficyna Edukacyjna, 2010.
— M. Braun, M. Dobrowolska, M. Karpiński, J. Lech, E. Zamościńska,Matematyka II Zbiór zadań dla liceum i technikum, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 2005.
— N. Dróbka, K. Szymański, Zbiór zadań z matematyki dla kl. I i II liceum ogólnokształcącego, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1994.

Wskazówki

1. (a) Oblicz $\cos y = -1$ a następnie za y podstaw $4x$ i wyznacz x, (b) Odczytaj wartość z tabelki, (c) Oblicz $\cos y = 0$ a następnie za y podstaw $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}$ i wyznacz x, (d) odczytaj z wykresu **2.** (a) Wprowadź nową zmienną $\sin x = t$ i rozwiąż równanie kwadratowe, a następnie wyznacz x, (b) Przenieś $\cos x$ na prawą stronę i podziel przez $\cos x$ i odczytaj rozwiązanie z wartości $\operatorname{tg} x$, (c) analogicznie do (b), (d) skorzystaj z jedynki trygonometrycznej **3.** Rozważ dwa przypadki $\sin x \leqslant 0$ i $\sin x > 0$. **4.** (a),(b),(c) odczytujemy z wykresu, (d) Zapisz nierówność w postaci $\cos x(\cos x - 5) <$ i rozważ kiedy ten iloczyn będzie ujemny. **5.** Przemnóż równanie przez $\frac{\sqrt{2}}{2}$ i skorzystaj ze wzoru na $\sin(\alpha + \beta)$. **6.** Odczytaj z wykresu **7.** Skorzystaj ze wzoru na $\cos\alpha + \cos\beta$. **8.** (a),(b) Skorzystaj z wzoru na różnicę $\sin\alpha - \sin\beta$, (c) Podziel równanie przez dwa i skorzystaj ze wzoru na $\sin\alpha + \beta$, (d) Skorzystaj ze wzoru na $\operatorname{tg} 2\alpha$. **9.** Wykonaj rysunki dla podanych funkcji.

Odpowiedzi

1. a) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ dla $k \in \mathbb{Z}$, b) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, c) $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$, d) $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$ **2.** a) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$, b) $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$, c) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ gdzie $k \in \mathbb{Z}$, d) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$ **3.** $x \in [-\pi + 2k\pi, 0 + 2k\pi]$ **4.** a) $x \in (\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi)$ dla $k \in \mathbb{Z}$, b) $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi)$ dla $k \in \mathbb{Z}$ c) $x \in (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3}{4}\pi + 2k\pi)$ dla $k \in \mathbb{Z}$, d) $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ dla $k \in \mathbb{Z}$ **5.** $x = 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$ **6.** dla $|m| > 1$ brak rozwiązań, dla $m = 1, -1$ dwa rozwiązania, dla $m \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ cztery rozwiązania, dla $m = 0$ pięć rozwiązań **7.** $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}k\pi$ lub $x = (2k+1)\pi$ lub $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$ **8.** a) $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}k\pi \quad \vee \quad x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ b) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \quad \vee \quad x = \pm\frac{\pi}{12}\pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$, c) $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{7}{12}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$, d) $k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ **9.** a) $x \in (\frac{5}{12}\pi + k\pi, \frac{13}{12}\pi + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$, b) $x \in (-\frac{\pi}{4} + k\pi, k\pi) \cup (\frac{\pi}{4}\pi + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$, c) $x \in (-\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}), \quad k \in \mathbb{Z}$, d) $x \in (\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3}{4}\pi + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$