

2 Potęgowanie i pierwiastkowanie liczb zespolonych

1. Zapisz w postaci trygonometrycznej liczby: -12 , $-1 + i$, $-1 - i\sqrt{3}$, $\sqrt{3} + i$.

2. Oblicz ze wzoru de Moivre'a:

(a) $(-1 + i)^{45}$,

(b) $(-1 - i\sqrt{3})^{76}$,

(c) $(\sqrt{3} + i)^{2020}$.

3. Oblicz $\sqrt{8 - 6i}$, $\sqrt{1 + 4i\sqrt{5}}$.

4. Rozwiąż równania w \mathbb{C} :

(a) $x^6 = 27$,

(b) $x^2 = -3i$,

(c) $x^4 = -1$,

(d) $x^8 = 1$,

(e) $x^3 = -7$.

5. Niech $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}$ będą n -tymi pierwiastkami z jedności. Wykaż, że:

(a) $\sum_{k=0}^n \varepsilon_k = 0$,

(b) $\prod_{k=0}^n \varepsilon_k = (-1)^{n-1}$.

6. Korzystając ze wzorów de Moivre'a, wykaż tożsamości trygonometryczne:

(a) $\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$,

(b) $\sin 4x = 4 \sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x)$.

7. Korzystając ze wzorów $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, wykaż tożsamości:

(a) $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$,

(b) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,

(c) $\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$,

(d) $\sin 4x = 4 \sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x)$,

(e) $\sum_{k=1}^n r^k \cdot \sin(k \cdot x) = \frac{r \cdot \sin x - r^{n+1} \sin((n+1)x) + r^{n+1} \sin(nx)}{1 - 2r \cos x + r^2}$.

8. Rozłóż wielomian $x^4 - 1$ na iloczyn nierozkładalnych wielomianów o współczynnikach rzeczywistych.