NWD, NWW, ALGORYTM EUKLIDESA

1. Wykaż, że dla $c > 0$: $NWD(c \cdot a, c \cdot b) = c \cdot NWD(a, b)$.
2. Wykaż, że:
   (a) $NWD(a, b, c) = NWD(NWD(a, b), c)$,
   (b) $NWW(a, b, c) = NWW(NWW(a, b), c)$.
3. Oblicz NWD:
   (a) $NWD(2^3 \cdot 3^2 \cdot 14, 2^2 \cdot 5 \cdot 7^3)$
   (b) $NWD(51, 136)$
   (c) $NWD(90, 189, 252)$
   (d) $NWD(108, 276, 204)$
4. Oblicz NWW:
   (a) $NWW(51, 136)$
   (b) $NWW(279, 372)$
   (c) $NWW(115, 161)$
5. Największy wspólny dzielnik liczb a i b jest równy 24, a ich najmniejsza wspólna wielokrotność jest równa 2496. Znaleźć liczby a i b.
6. Oblicz:
   (a) $NWD(n, n + 1)$,
   (b) $NWD(n, n + 3)$,
   (c) $NWD(37n + 2, 15n + 1)$.
7. Niech (F_n) będzie ciągiem Fibbonacciego, zdefiniowanym równościami:
   $$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \text{ dla } n \geqslant 0.$$
   Wykaż, że $NWD(F_n, F_{n+1}) = 1$ dla każdego n.
8. Pokazać, że:
   $$NWD(a, b) \cdot NWD(a, c) \cdot NWD(b, c) \cdot NWW(a, b) \cdot NWW(a, c) \cdot NWW(b, c) = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2.$$
9. (a) Liczby a oraz b są względnie pierwsze. Wykaż, że $a \cdot b | c \Leftrightarrow a | c \wedge b | c$.
   (Wsk. naśladuj dowód lematu Euklidesa.)
   (b) Podaj przykład liczb a, b, c takich, że $a|c$ oraz $b|c$, ale $a \cdot b \nmid c$.
10. Rozwiąż układy równań:
    (a) $\begin{cases} NWD(x, y) = 45 \\ x/y = 11/7 \end{cases}$
    (b) $\begin{cases} NWD(x, y) = 20 \\ x \cdot y = 8400 \end{cases}$
    (c) $\begin{cases} NWD(x, y) = 30 \\ x + y = 150 \end{cases}$
    (d) $\begin{cases} x + y = 667 \\ \frac{NWW(x,y)}{NWD(x,y)} = 120. \end{cases}$
11. Rozwiąż równania:
    (a) $14x + 28y = 39$
    (b) $7x – 8y = 44$
    (c) $17x + 39y = 83$
    (d) $42823x + 6409y = 17$
    (e) $42823x + 6409y = 68$
    (f) $3x + 2y + 4z = 1$
    (g) $3x + 5y + 6z = 5$.
12. * Fabryka wysyła towar w paczkach po 3 kg i po 5 kg. Wykazać, że można w ten sposób wysłać każdą całkowitą ilość kilogramów większą niz 7.
13. * Pokaż, że dla dowolnych liczb naturalnych parami względnie pierwszych p, q, r równanie $x^p + y^q = z^r$ ma rozwiązanie w liczbach naturalnych x, y, z.