Małe Twierdzenie Fermata i twierdzenie Eulera

Małe twierdzenie Fermata

1. Znajdź resztę z dzielenia:
   (a) 2^{505} przez 101,
   (b) 4^{123} przez 13,
   (c) 522^{204} przez 13.
2. Niech $p > 3$ będzie liczbą pierwszą. Wykaż, że p dzieli liczbę $\underbrace{11\ldots1}_{p-1}$.
3. Niech $p > 3$ będzie liczbą pierwszą. Wykaż, że dla $p \nmid a$ mamy: $a^{(p-1)/2} \equiv \pm 1 \pmod{p}$.
4. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą. Znajdź resztę z dzielenia 2^{p^2} przez p.
5. Niech p, q będą różnymi liczbami pierwszymi. Oblicz $p^{q-1} + q^{p-1} \pmod{pq}$.
6. Udowodnij, że dla liczby pierwszej $p \neq 2, 3$ zachodzi: $2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} \equiv 1 \pmod{p}$.
   (*wskazówka: pomnóż kongruencję obustronnie przez* 2)
7. Niech p będzie liczbą pierwszą, $p \equiv 2 \pmod{3}$. Wykaż, że dla dowolnego $a \in \mathbb{Z}$ istnieje $b \in \mathbb{Z}$ takie, że $a \equiv b^3 \pmod{p}$.

Funkcja Eulera

1. Policz: $\varphi(55), \varphi(125), \varphi(375)$.
2. Oblicz liczbę właściwych ułamków nieskracalnych o mianowniku 55.
3. Pokaż, że:
   (a) $\varphi(4n+2) = \varphi(2n+1)$,
   (b) $\varphi(4n) = \begin{cases} 2\varphi(n), & \text{gdy } 2 \nmid n, \\ 2\varphi(2n), & \text{gdy } 2 | n. \end{cases}$
4. Wykaż, że $\varphi(n) = n - 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą pierwszą.
5. Znaleźć liczbę naturalną a, jeśli $\varphi(a) = 3600$ oraz jedynymi dzielnikami pierwszymi a są: $3, 5, 7$.

Twierdzenie Eulera

1. Znajdź resztę z dzielenia:
   (a) 317^{259} przez 15,
   (b) 6^{1000} przez 8,
   (c) 7^{67} przez 12,
   (d) $2^{1000000}$ przez 77.
2. Wykaż, że dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$:
   (a) $30 | n^5 - n$,
   (b) $15 | n^7 - n^5 - n^3 + n$.
3. Wykaż, że $11 \cdot 33 | 2^{320} - 1$.