

**Zadania do indywidualnego
rozwiązania za dodatkowe punkty**
Algebra II
Zima 2024/2025

prof. Wojciech Gajda

Zasady:

Zadanie 1. (5pts)

Niech A będzie pierścieniem przemiennym z jedynką. Dowieść, że A jest ciałem, wtedy i tylko wtedy, gdy $A \neq 0$ oraz A ma tylko niewłaściwe ideały (0 i A).

Zadanie 2. (10pts)

Niech p będzie liczbą pierwszą, $d \in \mathbf{Z}$ liczbą, która nie jest kwadratem liczby całkowitej. W pierścieniu $\mathbf{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbf{Z}\}$ rozważmy ideał główny $I = (p) = p\mathbf{Z}[\sqrt{d}]$. Dowieść, że I jest ideałem pierwszym wtedy i tylko wtedy, gdy klasa d reszt modulo p nie jest kwadratem w ciele $\mathbf{F}_p$.

Zadanie 3. (5pts)

Niech K/k będzie rozszerzeniem ciał oraz niech $\alpha, \beta \in K$ będą takie, że $[k(\alpha) : k] = m$ i $[k(\beta) : k] = n$. Dowieść, że $[k(\alpha, \beta) : k(\beta)] = m$, wtedy i tylko wtedy, gdy $[k(\alpha, \beta) : k(\alpha)] = n$. Przeformułować ten warunek w terminach wielomianów minimalnych elementu α nad ciałem k i nad ciałem $k(\beta)$.

Zadanie 4. (10pts)

Niech k będzie ciałem. Dowieść, że:

- (a) jeżeli $a, b \in k$ są takie, że a jest kwadratem w $k(\sqrt{b})$, to a lub ab jest kwadratem w k ,
(**Wskazówka.** Rozpisać $(c + d\sqrt{b})^2$)
- (b) jeśli $a, b \in k$, b nie jest kwadratem w k , $K = k(\beta)$ dla $\beta^2 = b$ i jeden z elementów $a + \beta$ lub $a - \beta$ jest kwadratem w K , to kwadratem jest także drugi z tych elementów. Wywnioskować z tego, że $c = a^2 - b$ jest kwadratem w k ,
- (c) jeśli $\text{char } k \neq 2$, $a, b \in k$ i $K = k(\alpha, \beta)$ dla $\alpha^2 = a$, $\beta^2 = b$, oraz $\gamma = \alpha(\beta + 1)$, to $K = k(\gamma)$. (**Wskazówka.** Wyrazić α i β za pomocą γ) Własność (a) pozwala rozstrzygnąć kiedy $[K : k] = 1, 2$ lub 4 . Wyznaczyć wielomian minimalny elementu γ nad k w każdym z tych przypadków.

Zadanie 5. (10pts) (Liczby Liouville'a, 1844)

Niech α będzie liczbą algebraiczną nad $\mathbf{Q}$ stopnia d . (a) Pokazać, że istnieje wielomian $P \in \mathbf{Z}[X]$ taki, że $P(\alpha) = 0$ i $P'(\alpha) \neq 0$. (b) Za pomocą (a) dowieść, że istnieje liczba rzeczywista $c > 0$ taka, że dla każdej pary liczb całkowitych (p, q) , gdzie $q \neq 0$, zachodzi nierówność $|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^d}$. (c) Dowieść, że liczba rzeczywista $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$ jest przestępna¹.

Zadanie 6. (10pts)

(a) Niech $k = \mathbf{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbf{R}$. Dowieść, że istnieje homomorfizm ciał $\phi : k \rightarrow k$ taki, że $\phi(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$. Czy ϕ jest funkcją ciągłą? (b) Dowieść, że każdy homomorfizm ciał $\phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ jest identycznością. **Wskazówka.** Ponieważ z definicji $\phi(1) = 1$, to powtarzając argument z wykładu można wykazać, że ϕ obcięty do ciała $\mathbf{Q}$ jest identycznością. Dla wykazania ciągłości funkcji ϕ należy znaleźć (czysto) algebraiczny warunek pozwalający odróżniać liczby rzeczywiste dodatnie od liczb rzeczywistych ujemnych, taki że założenie $a > 0$ pociągnie nierówność $\phi(a) > 0$. **Uwaga.** Własność (b) homomorfizmu ciał liczb rzeczywistych jest bardzo szczególna, ponieważ na przykład, istnieje nieprzeliczalnie wiele homomorfizmów ciał $\phi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$. Czy potrafisz tego dowieść?

¹Liczby rzeczywiste, których przestępność można dowieść w ten sposób noszą nazwę liczb Liouville'a. Wiadomo, że zbiór liczb Liouville'a jest nieprzeliczalny i miary zero. Wiadomo także, że ani π ani e nie są liczbami Liouville'a.

Zadanie 7. (10pts)

(1) Dowieść, że $\Phi_n(x) = x^{\phi(n)}\Phi_n(1/x)$ oraz, że współczynniki wielomianu $\Phi_n(x)$ spełniają równości: $a_k = a_{\phi(n)-k}$ dla $0 \leq k \leq \phi(n)$. Wywnioskować z tego, że wielomian $\Phi_n(x)$ jest całkowicie określony przez swoją klasę reszt w pierścieniu ilorazowym $\mathbf{Z}[x]/(x^{[\phi(n)/2]+1})$, gdzie $[a]$ oznacza część całkowitą liczby a . (2) Pokazać, że:

- $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$, gdzie $m = \text{rad}(n)$ jest iloczynem wszystkich, różnych dzielników pierwszych liczby n .
- $\Phi_{pn}(x) = \Phi_n(x^p)/\Phi_n(x)$, jeżeli p nie dzieli n
- $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$ dla $n > 1$, nieparzystego.

Zadanie 8. (10pts)

Sprawdzić, że wielomian x^4+1 jest nierozkładalny w $\mathbf{Q}[x]$. Dowieść, że dla każdej liczby pierwszej p , redukcja modulo p wielomianu x^4+1 jest wielomianem rozkładalnym w $\mathbf{F}_p[x]$. Sprawdzić podobny fakt dla x^8+1 .

Zadanie 9. (10pts)

(a) Niech $a, b \in k$ oraz $c = a^2 - b$. Załóżmy, że żaden z elementów: b, c, bc nie jest kwadratem w ciele k . Niech K będzie ciałem rozkładu wielomianu $f = (x^2 - a)^2 - b$. Dowieść, że $[K:k] = 8$. (b) Niech $a, b \in k$ i załóżmy, że wielomian $f = x^4 - 2ax^2 + b^2$ jest nierozkładalny w pierścieniu wielomianów $k[x]$. Dowieść, że jeśli $\alpha \in L$ jest pierwiastkiem wielomianu f w pewnym rozszerzeniu ciał L/k , to b/α jest pierwiastkiem wielomianu f . Wywnioskować z tego, że $K = k(\alpha)$ jest ciałem rozkładu wielomianu f nad k .

Zadanie 10. (10pts) (*pierścień liczb dualnych*)

- (a) Niech A będzie pierścieniem przemiennym z jedynką oraz niech $B = A[\epsilon]$ będzie zdefiniowany w następujący sposób: B jest zbiorem par (a, b) , gdzie $a, b \in A$, z dodawaniem po współrzędnych i mnożeniem zadanym wzorem $(a, b)(c, d) = (ac, ad + bc)$. Dowieść, że B z tak określonymi działaniami jest pierścieniem przemiennym oraz, że istnieje $\epsilon \in B$, taki, że $\epsilon^2 = 0$ oraz każdy element z B można jednoznacznie zapisać w postaci $a + b\epsilon$, dla pewnych $a, b \in A$.
Wskazówka. Porównaj B z pierścieniem ilorazowym $A[x]/(x^2)$.

- (b) Niech k będzie dowolnym ciałem, $A = k[x]$ oraz niech B będzie pierścieniem z (a) utworzonym dla A . Dla $f \in k[x]$ zapisujemy $f(x + \epsilon) = f + \delta(f)\epsilon \in B$. Sprawdzić, że w ten sposób definiujemy funkcję k -liniową $\delta : k[x] \rightarrow k[x]$ taką, że $\delta(a) = 0$ dla $a \in k$ i $\delta(fg) = f\delta(g) + g\delta(f)$ dla $f, g \in k[x]$, zgodną z pochodną formalną wielomianów z wykładu 8.

Zadanie 11. (10pts)

- (a) Niech $p \neq 2$ będzie liczbą pierwszą i niech $AGL_1(\mathbf{F}_p)$ oznacza zbiór funkcji afinicznych $\gamma_{i,j} : \mathbf{F}_p \rightarrow \mathbf{F}_p$, gdzie $(i, j) \in \mathbf{F}_p^\times \times \mathbf{F}_p$ zadanymi wzorami $\gamma_{i,j}(x) = ix + j$. Dowieść, że zbiór $AGL_1(\mathbf{F}_p)$ ze składaniem funkcji jest grupą, która jest izomorficzna z iloczynem półprostym grup $\mathbf{Z}/(p-1)$ i $\mathbf{Z}/p$.
- (b) Dowieść, że stopień rozszerzenia $E/\mathbf{Q}$, gdzie E jest ciałem rozkładu wielomianu $x^p - 2$ nad $\mathbf{Q}$, wynosi $p(p-1)$.
- (c) Dowieść, że przy oznaczeniach z (a) i (b), zachodzi izomorfizm grup $\text{Gal}(E/\mathbf{Q}) \cong AGL_1(\mathbf{F}_p)$.

Wesołych Świąt