

Ćwiczenia 20 października 2025

Zadanie 1. Niech będą dane elementy a, b i c grupy G . Dowieść, że:

- (a) $\text{rz } a = \text{rz } (a^{-1})$
- (b) $\text{rz } a = \text{rz } (bab^{-1})$
- (c) $\text{rz } (ab) = \text{rz } (ba)$
- (d) $\text{rz } (abc) = \text{rz } (bca)$.
- (e) Niech G będzie grupą cykliczną rzędu n , której generatorem jest g .
Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej k mamy: $\text{rz } (g^k) = \frac{n}{(n,k)}$, gdzie
 (a, b) oznacza największy wspólny dzielnik liczb całkowitych a i b .

Zadanie 2. Niech G będzie grupą cykliczną. Dowieść, że wtedy: (a) jeśli G jest grupą nieskończoną, to $G \simeq \mathbf{Z}$, (b) jeśli G jest grupą n -elementową, to $G \simeq \mathbf{Z}/n$, (c)* jeśli G jest grupą n -elementową, to dla każdego $d|n$ istnieje dokładnie jedna podgrupa w G złożona z d elementów.

Zadanie 3. Dowieść, że żadna grupa nie jest sumą mnogościową dwóch swoich podgrup właściwych, ale istnieją grupy, które są sumami trzech podgrup właściwych. Czy grupa rzędu nieparzystego może być sumą mnogościową trzech swoich podgrup właściwych?

Zadanie 4. Dowieść, że grupa, w której każdy element g spełnia równanie $g^2 = 1$ jest abelowa. Znaleźć grupę skończoną nieabelową, w której każdy element g spełnia równanie $g^3 = 1$. Rozważyć przypadek wykładnika większego od trzech. **Wskazówka.** Podgrupy w $GL_n(\mathbf{Z}/n)$ złożone z pewnych macierzy górnotrójkątnych.

Zadanie 5. Niech G będzie grupą abelową skończoną, a liczba m niech będzie równa maksimum rzędów elementów G . Dowieść, że $g^m = 1$ dla $g \in G$.

Zadanie 6* (Zadanie Dana Shapiry z OSU, 3.10.1986) Niech będą dane grupa G i jej podgrupa H oraz warstwa lewa L i warstwy prawe R_1 i R_2 względem H takie, że $L \cap R_1 \neq \emptyset$ i $L \cap R_2 \neq \emptyset$. Dowieść, że wtedy zbiory $L \cap R_1$ i $L \cap R_2$ są równoliczne.

Wskazówka. Niech $L = yH$, $R_1 = Hx_1$ oraz $R_2 = Hx_2$, dla $y, x_1, x_2 \in G$. Dowieść istnienia bijekcji zbiorów $L \cap R_i \equiv \{(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2 : h_1^{-1}yh_2 = x_i\}$, dla $i=1, 2$. W $H \times H$ rozważać podgrupę $K(y) := \{(h_1, h_2) \in H \times H : h_1^{-1}yh_2 = y\}$ oraz pewne jej warstwy.