

Ćwiczenia 27 października 2025

Zadanie 1. Podaj przykłady lub dowiedz, że nie ma:

- (a) grupy nieskończonej w której istnieje właściwa podgrupa skończona,
- (b) grupy skończonej rzędu > 3 , która nie posiada podgrup właściwych,
- (c) grupy nieskończonej, która nie ma podgrup właściwych.

Zadanie 2. Niech G będzie podgrupą w $GL_2(\mathbf{Z})$ generowaną przez macierze:
 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Pokazać, że G składa się z ośmiu elementów oraz, że G jest izomorficzna¹ z D_4 .

Zadanie 3.

- (a) Wyznaczyć wszystkie dzielniki normalne grup Q_8 i D_4 oraz obliczyć odpowiadające im grupy ilorazowe.
- (b) Sprawdzić czy podzbiór H grupy G jest podgrupą normalną, jeśli mamy:
$$H = \left\{ A \in GL_3(\mathbf{F}_3) : A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad G = GL_3(\mathbf{F}_3).$$
 Oblicz $|H|$ oraz $|G|$.

Zadanie 4.

- (a) Dowieść, że w grupie addytywnej $(\mathbf{Q}, +, 0)$ ciała liczb wymiernych nie ma podgrup właściwych skończonego indeksu.
- (b) Dowieść, że w grupie ilorazowej $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ każdy element ma skończony rząd.

Zadanie 5. Niech G będzie grupą, a H i K jej podgrupami normalnymi takimi, że $H \cap K = \{1_G\}$.

- (a) Dowieść, że elementy podgrup H i K komutują ze sobą, to znaczy, że $hk = kh$, dla każdego $h \in H$, $k \in K$.
- (b) Dowieść, że wtedy $HK := \{hk : h \in H, k \in K\}$ jest grupą izomorficzną z iloczynem prostym grup $H \times K$.

Zadanie 6* Sprawdzić, że A_4 nie posiada podgrupy rzędu 6, a w S_4 nie ma dzielników normalnych rzędów 3 i 8. W szczególności, wynika z tego, że twierdzenie odwrotne do twierdzenia Lagrange'a jest fałszywe. **Wskazówka.** Rozważyć klasy sprzężoności.

¹**ALGO:** Grupy G_1 i G_2 są **izomorficzne**, jeśli istnieje homomorfizm grup $G_1 \rightarrow G_2$, który jest bijekcją zbiorów.