

Ćwiczenia 3 i 10 listopada 2025

Zadanie 1. (jeszcze o warstwach)

Dowieść, że $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$, jeśli H i K są skończonymi podgrupami grupy G .

Zadanie 2. Na wykładzie 3 dla grupy G zdefiniowaliśmy jej **centrum**: $Z(G) = \{h \in G : gh = hg \text{ dla wszystkich } g \in G\}$. (a) Obliczyć $Z(S_3)$, $Z(Q_8)$ i $Z(D_4)$. (b) Dowieść, że $Z(G)$ jest dzielnikiem normalnym w G . (c)* Wyznaczyć $Z(GL_2(\mathbf{F}_p))$, dla liczby pierwszej p oraz $Z(S_n)$, dla $n \geq 3$.

Zadanie 3.

W grupie G określamy relację w następujący sposób: $a \sim b$, wtedy i tylko wtedy, gdy $a = bgb^{-1}$ dla pewnego $g \in G$. (a) Z wykładu wiemy, że $\sim$ jest relacją równoważności. (b) Klasa abstrakcji elementu a względem relacji $\sim$ jest równa klasie sprzężoności C_a . Dowieść, że: (c) zawsze zachodzi: $a \in C_a$. Ponadto $C_a = \{a\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in Z(G)$. (d) Jeśli G jest skończona, to liczba $|C_a| = [G : C(a)]$ dzieli rząd grupy G , gdzie $C(a) = \{g \in G : gag^{-1} = a\}$ jest **centralizatorem** elementu a w grupie G . **Wskazówka.** Czy $C(a)$ jest podgrupą w G ?

Zadanie 4.

Uzasadnić dlaczego grupy G_1 i G_2 nie są izomorficzne jeżeli: (a) $G_1 = \mathbf{R}^\times$, $G_2 = \mathbf{C}^\times$, (b) $G_1 = (\mathbf{R}, +)$, $G_2 = (\mathbf{Q}, +)$, (c) $G_1 = Q_8$, $G_2 = D_4$, (d) $G_1 = D_{12}$, $G_2 = S_4$, (e) $G_1 = S_n$, $G_2 = S_m$, gdzie $n \neq m$, (f) $G_1 = Q_8$, $G_2 = \mathbf{Z}/8$, $G_1 = A_4$ i $G_2 = D_6$.

Zadanie 5.

Korzystając z pierwszego twierdzenia o izomorfizmie dowieść, że mamy: $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \simeq \mathbf{Z}/n$, $D_4/\{\text{obroty}\} \simeq \mathbf{Z}/2$, $GL_n(K)/SL_n(K) \simeq K^\times$. Obliczyć liczbę elementów specjalnej grupy liniowej $SL_n(\mathbf{F}_p)$, dla liczby naturalnej n i liczby pierwszej p .

Zadanie 6.

Niech G będzie grupą. Przyjmujemy oznaczenia:

$$Aut(G) = (\{\sigma : G \longrightarrow G, \sigma \text{ jest automorfizmem}\}, \circ, Id_G)$$

$$Int(G) = (\{\sigma_a : G \longrightarrow G : \sigma_a(g) = aga^{-1}, a \in G\}, \circ, Id_G),$$

gdzie $\circ$ oznacza operację składania funkcji. oraz Id_G jest identycznością zbioru G . Dowieść, że $Int(G)$ jest podgrupą w **grupie automorfizmów** $Aut(G)$ oraz, że $Int(G) \simeq G/Z(G)$, gdzie $Z(G)$ oznacza centrum grupy G , które zostało zdefiniowane w Zadaniu 1. $Int(G)$ nosi nazwę grupy automorfizmów wewnętrznych. Skonstruować izomorfizmy grup: $Aut(\mathbf{Z}/n) \simeq (\mathbf{Z}/n)^\times$ oraz $Aut(\mathbf{Z}/p \times \mathbf{Z}/p) \simeq GL_2(\mathbf{F}_p)$, gdzie p jest liczbą pierwszą.