

Zadania do wykładu 5

prof. Wojciech Gajda

Algebra 1

Zima 2025/2026

Ćwiczenia do wykładu 5 i 6

Zadanie 1.

Niech G będzie grupą. Dowieść, że następujące warunki są równoważne: (a) G jest grupą abelową, (b) funkcja $\phi: G \rightarrow G$ dana wzorem $\phi(g)=g^{-1}$ jest homomorfizmem grup, (c) funkcja $\psi: G \rightarrow G$ dana wzorem $\psi(g)=g^2$ jest homomorfizmem grup.

Zadanie 2.

Znaleźć co najmniej jeden, nietrywialny homomorfizm: (a) $\phi: \mathbf{Z}/3 \rightarrow \mathbf{Z}/9$, (b) $\phi: \mathbf{Z}/15 \rightarrow \mathbf{Z}/9$, (c) $\phi: \mathbf{Z}/20 \rightarrow \mathbf{Z}/12$, (d) $\phi: D_4 \rightarrow Q_8$, (e) $\phi: S_4 \rightarrow S_3$, (f) $\phi: S_3 \rightarrow D_4$.

Zadanie 3.

Wyznaczyć wszystkie homomorfizmy grup: (a) $\phi: \mathbf{Z}/3 \rightarrow \mathbf{Z}$, (b) $\phi: S_3 \rightarrow \mathbf{Z}/11$, (c) $\phi: \mathbf{Z}/6 \rightarrow \mathbf{Z}/6$, (d) $\phi: \mathbf{Z}/12 \rightarrow \mathbf{Z}/18$, (e)* $\phi: D_4 \rightarrow Q_8$.

Zadanie 4.

Wyznaczyć klasę sprzężoności elementu g w grupie G dla:

(a) $g=(1\ 2)$, $G=S_3$,

(b) $g=symetria$, $G=D_4$,

(c) $g=(1\ 2)(3\ 4)$, $G=S_5$,

(d) $g=i$, $G=Q_8$.

Zadanie 5.

Dowieść, że $Z(S_n)$ jest grupą trywialną dla każdego $n > 2$.

Zadanie 6.

(a) Niech G będzie grupą dla której $G/Z(G)$ jest grupą cykliczną. Dowieść, że wtedy G jest abelowa. (b)* Korzystając z (a) można dowieść, że każda grupa rzędu p^2 , gdzie p jest liczbą pierwszą, jest grupą abelową. Przeprowadź swój dowód tego faktu.