

Ćwiczenia 24 listopada 2025

Zadanie 1.

(a) Skonstruować siedem nie izomorficznych grup abelowych rzędu 360. Przykładami takich grup są: $\mathbf{Z}/360$, $\mathbf{Z}/180 \times \mathbf{Z}/2$ i $\mathbf{Z}/90 \times \mathbf{Z}/4$. (b) Dowieść, że grupa, która ma tylko skończoną liczbę podgrup jest skończona.

Zadanie 2.

Niech G będzie dowolną grupą. Oznaczmy przez G' podgrupę w G generowaną przez elementy postaci $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$, dla $a, b \in G$. Pokazać, że: (a) G' jest dzielnikiem normalnym w G , (b) G/G' jest grupą abelową, (c) jeśli H jest dzielnikiem normalnym w G takim, że G/H jest grupą abelową, to $G' \subseteq H$.

Zadanie 3*

Korzystając z opisu klas sprzężoności w grupie S_5 pokazać, że grupa A_5 nie posiada właściwych dzielników normalnych. **Uwaga.** Grupę, która nie ma właściwych dzielników normalnych nazywamy **grupą prostą**. Przykładami grup prostych poza A_5 są grupy cykliczne $\mathbf{Z}/p$ rzędu liczba pierwsza. Dla każdego $n > 4$, grupa alternująca A_n jest grupą prostą. Czy potrafisz to dowieść?

Zadanie 4.

(a) Jeżeli X jest zbiorem, to symbolem $Sym(X)$ oznaczamy zbiór wszystkich bijekcji $\sigma: X \rightarrow X$. Sprawdzić, że z działaniem składania funkcji $Sym(X)$ stanowi grupę. Oczywiście, $S_n = Sym([n])$, gdzie $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. (b) Niech $f: G \times X \rightarrow X$ będzie działaniem grupy G na zbiorze X . Pokazać, że f indukuje homomorfizm grup $\phi: G \rightarrow Sym(X)$ określony za pomocą wzoru: $\phi(g)(x) = f(g, x)$ dla $g \in G$ i $x \in X$. W szczególności: każde działanie grupy na zbiorze $[n]$ określa homomorfizm grup $G \rightarrow S_n$. (c) Sprawdzić, że także na odwrót: homomorfizmowi $\phi: G \rightarrow Sym(X)$ odpowiada działanie G na X . Wyrazić $\ker \phi$ za pomocą stabilizatorów w tym działaniu.

Zadanie 5.

Niech $f: G \times X \rightarrow X$ będzie działaniem grupy G na zbiorze X . Określamy relację $\sim$ na zbiorze X : $x \sim y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = f(g, y)$ dla pewnego $g \in G$.

- (a) Sprawdzić, że $\sim$ jest relacją równoważności.
- (b) Klasa abstrakcji elementu x względem relacji $\sim$ jest równa orbicie Gx .
- (c) Wywnioskować z (b), że zbiór X jest sumą rozłącznych orbit.
- (d)* Dowieść, że $Z(G) \neq 1$, jeśli G jest grupą skończoną rzędu potęgą liczby pierwszej.