

Zadania do wykładu 7

prof. Wojciech Gajda

Algebra 1

Zima 2025/2026

Zadanie 1. Niech G będzie grupą, a H jej podgrupą. Dowieść, że H jest podgrupą normalną, jeżeli: (a) $|G|=33, |H|=11$, (b) $|G|=35, |H|=7$, (c) $|G|=pn, |H|=p$, gdzie $p > n$ jest liczbą pierwszą.

Zadanie 2. Niech p będzie liczbą pierwszą. Niech G będzie grupą skończoną taką, że liczba p dzieli $|G|$. (a) Zdefiniujmy zbiór $X = \{(g_1, g_2, \dots, g_p) \in G^p : g_1 g_2 \dots g_p = 1\}$. Niech $f: \mathbf{Z}/p \times X \rightarrow X$ będzie funkcją określoną: $f(\bar{1}, (g_1, g_2, \dots, g_p)) = (g_2, g_3, \dots, g_p, g_1)$, gdzie $\bar{1}$ jest generatorem grupy $\mathbf{Z}/p$ oraz $(g_1, g_2, \dots, g_p) \in X$. Sprawdzić, że f definiuje działanie grupy $\mathbf{Z}/p$ na zbiorze X . (b) Ile elementów liczy zbiór X ? (c) Niech $X_0 = \{g \in G : g^p = 1\}$. Korzystając z rozkładu zbioru X na rozłączne orbity działania z (a) dowieść, że $|X_0| > 1$. (d) Wywnioskować z (c) **twierdzenie Cauchy'ego**: W grupie skończonej, której rząd dzieli się przez liczbę p , istnieje element rzędu p .

Zadanie 3. (a) Pokazać, że grupy rzędu: 33, 35 i 259 są grupami abelowymi. (b)* Niech $p > q$ będą liczbami pierwszymi takimi, że p nie przystaje do ± 1 modulo q , i niech G będzie grupą rzędu $p^2 q$. Dowieść, że wtedy G jest grupą abelową.

Zadanie 4 (Iloczyn półprosty grup) Niech będą dane dwie grupy H i N oraz homomorfizm grup $\phi: H \rightarrow \text{Aut}(N)$, który odpowiada działaniu grupy H na grupie N . Na zbiorze $H \times N$ określamy mnożenie:

$$(h_1, n_1)(h_2, n_2) = (h_1 h_2, \phi(h_2)(n_1) n_2)$$

gdzie $h_1, h_2 \in H$, $n_1, n_2 \in N$ oraz $\phi(h_2): N \rightarrow N$. (a) Sprawdzić, że z tak określonym mnożeniem zbiór $H \times N$ jest grupą. Tą grupę nazywamy **iloczynem półprostym** grup H i N ze względu na homomorfizm ϕ i oznaczamy $H \times_\phi N$. (b) Jeśli $\phi(h) = \text{Id}_N$ dla każdego $h \in H$, to iloczyn półprosty jest iloczynem prostym $H \oplus N$. (c) Niech H będzie podgrupą, a N dzielnikiem normalnym grupy G takimi, że $H \cap N = \{1\}$ oraz niech $\phi(h)(n) = h^{-1} n h$ dla $h \in H$ i $n \in N$. Dowieść, że $H \times_\phi N \simeq H N$. (d) Dowieść, że: $S_3 \simeq \mathbf{Z}/2 \times_\phi \mathbf{Z}/3$, $D_4 \simeq \mathbf{Z}/2 \times_{\phi_1} \mathbf{Z}/4$, $Q_8 \simeq \mathbf{Z}/2 \times_{\phi_2} \mathbf{Z}/4$ oraz $A_4 \simeq \mathbf{Z}/3 \times_\phi (\mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/2)$.

Zadanie 5* Niech G będzie grupą skończoną, która działa na zbiorze skończonym X . Dla $g \in G$ oznaczamy przez $f(g)$ liczbę punktów stałych dla g . (a) Dowieść **wzór Burnside'a**: Zbiór X składa się dokładnie z $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g)$ orbit. **Wskazówka**: Obliczyć na dwa różne sposoby liczbę elementów w $G \times X$ takich, że $gx = x$: raz sumując po $g \in G$, a drugi raz sumując po $x \in X$. (b) Dowieść, że $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g)^2 \geq 1$. **Wskazówka**: Rozważyć działanie G na zbiorze $X \times X$. (c) Wzmocnione **twierdzenia Jordana**: Załóżmy, że G działa w sposób przechodni na X (tzn. jest tylko jedna orbita w tym działaniu). Sumując po $g \in G$ wyrażenie $(f(g) - 1)(|X| - f(g))$ dowieść, że co najmniej $|G|/|X|$ elementów z G nie ma punktu stałego w X .