Materiały na ćwiczenia prof. Wojciech Gajda
Algebra 1
Zima 2025/2026

Ćwiczenia 15 grudnia i 12 stycznia (do wykładów 9 i 10)

Zadanie 1.
Znaleźć wszystkie dzielniki zera, elementy nilpotentne i elementy odwracalne pierścienia: $\mathbf{Z}/20$, $\mathbf{Q}\oplus\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/28$, $M_{2,2}(\mathbf{F}_2)$, $\mathbf{R}[x]/(x^2-1)\cong\mathbf{R}\oplus\mathbf{R}$.

Zadanie 2.
Dowieść, że w każdym skończonym pierścieniu przemiennym z jedynką element, który nie jest dzielnikiem zera jest elementem odwracalnym. Obliczyć 2^{-1} w pierścieniu $\mathbf{Z}/n$ jeśli $n>2$ jest liczbą nieparzystą.

Zadanie 3.
Niech X będzie zbiorem. Oznaczmy przez R zbiór wszystkich podzbiorów zbioru X. W R określamy działania:

$$A + B := (A - B) \cup (B - A)$$

$$AB := A \cap B.$$

Sprawdzić, że $(R, +, \cdot, \emptyset, X)$ jest pierścieniem przemiennym z jedynką.

Zadanie 4.
Mówimy, że pierścień R jest *pierścieniem Boole*'a jeśli $a^2 = a$ dla każdego $a \in R$. Dowieść, że pierścień Boole'a jest pierścieniem przemiennym oraz, że $a+a=0$ dla każdego elementu a w pierścieniu Boole'a.

Zadanie 5.
Niech A będzie pierścieniem przemiennym z jedynką oraz załóżmy, że istnieje liczba pierwsza p taka, że w A mamy $p1 = 1+1+\ldots+1 = 0$. Dowieść, że:

(a) $(a \pm b)^{p^n} = a^{p^n} \pm b^{p^n}$ dla każdego $a, b \in A$ i liczby naturalenj n

(b) funkcja $\phi : A \longrightarrow A$ zadana wzorem $\phi(a) = a^p$ jest homomorfimem pierścieni z jedynką.

Zadanie 6.
Niech A będzie pierścieniem przemiennym z jedynką. Czy grupa addytywna pierścienia $(A, +, 0)$ może być izomorficzna z grupą $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$?