

Ćwiczenia 19 stycznia (do wykładów 11 i 12)

Zadanie 1.

- (a) Które z pierścieni ilorazowych: $\mathbf{Z}/19$, $\mathbf{F}_5[x]/(x^3+x+1)$, $\mathbf{Q}[x]/(x^2)$, $\mathbf{C}[x]/(x^2+1)$, $\mathbf{F}_5[x]/(x^3+4x+4)$, $\mathbf{R}[x]/(x^2-5x+6)$, $K[x, y]/(xy-1)$ (K jest dowolnym ciałem) są dziedzinami całkowitości?
- (b) Z ilu elementów składa się pierścień A/I jeśli: $(\bullet) A=\mathbf{F}_3[x], I=(x^2)$, $(\bullet) A=\mathbf{Z}/m[x], I=(x^k)$, $(\bullet) A=\mathbf{F}_7[x], I=(x^5)$, $(\bullet) A=\mathbf{Z}/6[x, y], I=(x^5)+(y^8)$?

Zadanie 2.

Niech A będzie pierścieniem przemiennym z jedynką, a K ciałem. Korzystając z pierwszego twierdzenia o izomorfizmie dowieść, że: (a) $A[x]/I \simeq A$, gdzie $I=\{f \in A[x] : f(a)=0\}$ dla ustalonego $a \in A$, (b) $\mathbf{Q}[x]/(x^2-1) \simeq \mathbf{Q} \oplus \mathbf{Q}$, (c) $\mathbf{F}_7[x]/(x^2+5) \simeq \mathbf{F}_7 \oplus \mathbf{F}_7$, (d) $\mathbf{F}_5[x]/(x^2+1) \simeq \mathbf{F}_5 \oplus \mathbf{F}_5$, (e) $K[x, y]/(x) \simeq K[y]$, (f) $K[x, y]/(x^2-y) \simeq K[x]$.

Zadanie 3.

- (a) Dowieść, że $I=(2, x)=2\mathbf{Z}[x]+x\mathbf{Z}[x]$ nie jest ideałem głównym pierścienia $\mathbf{Z}[x]$.
- (b) Podać przykład podpierścienia, który nie jest ideałem.
- (c) Niech A będzie pierścieniem przemiennym z jedynką, który nie posiada ideałów właściwych. Dowieść, że A jest ciałem.

Zadanie 4.

- (a) Niech I_1 oraz I_2 będą ideałami pierścienia przemiennego z jedynką A . Niech $\varnothing$ będzie ideałem pierwszym w A takim, że $I_1 \cap I_2 \subset \varnothing$. Pokazać, że wtedy $I_1 \subset \varnothing$ lub $I_2 \subset \varnothing$.
- (b) Niech m będzie ideałem pierścienia przemiennego z jedynką A . Dowieść, że m jest ideałem maksymalnym w A , wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \notin m$ istnieje $b \in A$ taki, że $1-ab \in m$.

Zadanie 5*.

Mówimy, że pierścień przemienny z jedynką A jest *pierścieniem lokalnym* jeśli w A istnieje dokładnie jeden ideał maksymalny.

- (1) Dowieść, że A jest lokalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a, b \in A$ z tego, że $a+b=1$ wynika, że $a \in A^\times$ lub $b \in A^\times$.
- (2) Jeśli A jest pierścieniem przemiennym z jedynką, m jest ideałem maksymalnym z A , to A/m^n jest pierścieniem lokalnym dla każdego $n > 0$.