

- Wzory Cardano na rozwiązania równania $x^3 + px + q = 0$:

$$x_i = \zeta_3^i \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \zeta_3^{2i} \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad i = 0, 1, 2.$$

- Wzory Viete’a:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) = x^n - \sigma_1 \cdot x^{n-1} + \sigma_2 \cdot x^{n-2} + \dots + (-1)^n \cdot \sigma_n,$$

gdzie elementarne funkcje symetryczne $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ to

$$\sigma_d(x_1, \dots, x_n) := \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_d} x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_d}.$$

- Zasadnicze twierdzenie o wielomianach symetrycznych:

jeżeli $P \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ jest symetryczny, to istnieje wielomian Q taki, że $P(x_1, \dots, x_n) = Q(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$.

1. Suma dwóch liczb wynosi 1, zaś ich iloczyn -1 . Znajdź te liczby.
2. Udowodnij, że jeżeli dwa prostopadłościany mają równą sumę długości krawędzi, pole powierzchni oraz objętość, to są one przystające.
3. Rozwiąż równanie $z^3 + 3z^2 - 12z - 18 = 0$ za pomocą wzorów Cardano. Czy równanie to ma rozwiązania całkowite?
4. Znajdź sumę pierwiastków wielomianu $z^3 + 6z^2 + 9z + 3$ i sumę ich kwadratów.
5. Zapisz wielomian:

- $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_2 + x_3^2 x_1 + x_3 x_1^2$,
- $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$

jako funkcję elementarnych wielomianów symetrycznych.

6. Udowodnij, że jeżeli $a + b + c = 0$, to

$$2a^4 + 2b^4 + 2c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

7. (a) Oblicz liczbę jednomianów w wielomianie σ_k oraz wykorzystaj wzory Viete’a do dowodu wzoru dwumianowego Newtona.
(b) Wyraż $\sum_{i < j} \alpha_i^2 \alpha_j^2$ przez $\sigma_1, \dots, \sigma_n$.
(c) Niech $\Sigma_k := \sum_i \alpha_i^k$. Wyraż Σ_4 i Σ_5 przez $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ i podobnie dla Σ_6 i Σ_7 (możesz użyć pakietu komputerowego w tym celu).
(d) Wykaż tożsamość Newtona:

$$\Sigma_k - \sigma_1 \Sigma_{k-1} + \sigma_2 \Sigma_{k-2} - \dots + (-1)^{k-1} \sigma_{k-1} \Sigma_1 + (-1)^k \sigma_k = 0.$$

Jak można użyć ją do wyrażenia Σ_k przez elementarne wielomiany symetryczne?

8. (a) Czy wielomiany $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$ oraz $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2$ są symetryczne?
(b) Dla $n = 2$ zapisz wielomian $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2$ jako funkcję elementarnych wielomianów symetrycznych.
9. Niech $A \in M_n(\mathbb{C})$ będzie macierzą o wartościach własnych $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Wykaż, że $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ oraz $\det A = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$. Wskazówka: rozważ wielomian charakterystyczny $p_A(x) := \det(xI - A)$. W jaki sposób możemy otrzymać z tego wyznacznika jednomian x^{n-1} ?

ZADANIE DOMOWE

1. Przypomnij sobie, czym są pierwiastki z jedynki stopnia n ? Czym są pierwiastki pierwotne z jedynki stopnia n ? Jak wyrazić je w postaci $\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha$?
2. Znajdź wszystkie pierwiastki z jedynki stopnia 3 (wyrażając je przez liczby wymierne oraz $\sqrt{3}i$). Następnie wypisz wszystkie rozwiązania równania $x^3 = 2$.
3. Użyj strony wolframalpha.com do sprawdzenia, jaką postać mają pierwiastki z jedynki stopnia 5.
4. Wypisz wszystkie pierwiastki pierwotne z jedynki stopnia 12 jako potęgi jednego wybranego pierwiastka ζ_{12} .