GRUPY I ICH ZASTOSOWANIA
Pasjonaci matematyki
dr Jędrzej Garnek
mail: jgarnek amu.edu.pl
strona: jgarnek.faculty.wmi.amu.edu.pl (Dydaktyka ⇒ Pasjonaci Matematyki)

Grupy

1. Czy następujący zbiór jest grupą z podanym działaniem? Czy jest to grupa abelowa?
   (a) $G = \mathbb{Q}$, $a \star b = \frac{1}{2}(a+b)$,
   (b) $G = \mathbb{N}$, $a \star b := a^b$,
   (c) $G = \mathbb{R}_{>0}$, $a \star b := \sqrt{a \cdot b}$,
   (d) $G = \{5^k : k \in \mathbb{Z}\}$ wraz z działaniem dodawania,
   (e) $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ z działaniem składania funkcji,
   (f) $G = \mathbb{Z}[\frac{1}{3}] := \{\frac{a}{3^k} : a, k \in \mathbb{Z}\}$ z działaniem dodawania,
   (g) $G = \{5^k : k \in \mathbb{Z}\}$ wraz z działaniem mnożenia,
   (h) $G = (1, \infty)$ z działaniem $a \star b := ab - a - b + 2$,
   (i) $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(x) = ax + b,$ gdzie $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ z działaniem składania funkcji,
   (j) $G = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \setminus \{0\}$, gdzie $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ z działaniem mnożenia.
2. Wykaż, że $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ dla dowolnych elementów grupy $a, b \in G$.
3. Niech G będzie grupą. Udowodnij, że równość $(ab)^2 = a^2 \cdot b^2 \quad \forall_{a,b \in G}$ zachodzi wtw. gdy G jest abelowa.
4. Niech G będzie grupą, zaś $g, h \in G$. Wykaż, że jeżeli $(ghg^{-1})^n = e$, to $h^n = e$.
5. Wyznacz elementy grupy izometrii kwadratu. Wskaż element neutralny i elementy odwrotne do wszystkich elementów.
6. Wyznacz elementy grupy izometrii sześcianu.
7. Wykaż, że jeżeli p jest liczbą pierwszą, to $p | (p-1)! + 1$.

   (*Wskazówka: rozważ grupę $G = \Phi(p)$. W iloczynie $\prod_{g \in G} g$ dobierz elementy w pary. Jakie dwa elementy są odwrotne do samych siebie?*)

Rząd elementu, generator

1. Wyznacz rzędy elementów w poniższych grupach. Czy podana grupa jest cykliczna?
   (a) $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$, (c) $\mathbb{Z}/4$, (e) $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$, (g) $\mathbb{Z}/6$ (i) $\mathbb{Z}/20$
   (b) $\Phi(8)$, (d) $\Phi(10)$, (f) $\Phi(15)$, (h) $\Phi(9)$, (j) $\Phi(25)$.
2. (a) Wykaż, że jeżeli $NWD(a, n) = 1$ to $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, gdzie
   $$\varphi(n) = \#\{1 \leqslant a \leqslant n : NWD(a, n) = 1\}.$$
   (b) Oblicz resztę z dzielenia 5^{2025} przez 12.
3. (a) Ile generatorów jest w grupie $\Phi(11)$?
   (b) Wykaż, że w grupie $\Phi(p)$ jest $\varphi(p-1)$ generatorów dla dowolnej liczby pierwszej p.
4. Załóżmy, że s jest liczbą pierwszą oraz że $2^s - 1$ ma przynajmniej trzy różne dzielniki pierwsze p, q, r. Wykaż, że liczby $2^{p-1} - 1$, $2^{q-1} - 1$, $2^{r-1} - 1$ są podzielne przez pqr.
5. Wykaż, że jeżeli p jest liczbą pierwszą oraz $p - 1 \nmid k$, to $p | 1^k + 2^k + \ldots + (p-1)^k$.
6. Udowodnij, że jeśli p jest liczba pierwsza, to liczba $p^p - 1$ posiada dzielnik pierwszy, który daje resztę 1 z dzielenia przez p.

7. Wykaż, że każdy dzielnik pierwszy liczby $2^{2^n}+1$ jest postaci $2^{n+1}k+1$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

8. (a) Wykaż, że jeżeli każdy element grupy oprócz elementu neutralnego ma rząd 2, to jej rząd jest potęgą dwójki.

   (b) Na konferencji matematyków każdy z uczestników ma pewna ilość znajomych (jeśli a zna b to b zna a). Na wspólny obiad zastawiono dwa duże stoły. Każdy z matematyków domaga się, by spożywał posiłek przy jednym stole z parzysta liczba swoich znajomych. Na szczęście udało się rozmieścić matematyków wedle ich życzenia. Pokazać, ze ilość możliwych rozmieszczeń matematyków jest potęgą dwójki.

   (*Wskazówka: rozważ grupę nakazów, tzn. ciągów n liczb $a_1, \ldots, a_n$ takich, ze $a_i = 0$, jeśli i-ty matematyk ma zostać przy swoim stole, zas $a_i = 1$ gdy ten ma przenieść się do drugiego stołu*)

Podgrupy

1. Znajdź wszystkie podgrupy grupy:

   (a) $\mathbb{Z}/5$, (b) $\mathbb{Z}/8$, (c) $\mathbb{Z}/12$, (d) $\Phi(8)$, (e) $\Phi(5)$.

2. Wykaż, że jeżeli $n_1 + \ldots + n_t \leqslant n$, to $n_1! \cdot \ldots \cdot n_t! | n!$.

   (*Wskazówka: $S_{n_1} \times \ldots \times S_{n_t}$ jest podgrupą S_n*)

3. Dana jest rodzina R podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, n\}$ taka, że $|R| > 2^{n-1}$ oraz że jeśli A i B należą do R, to $A \cup B$ i $A \setminus B$ również. Wykaż, że dowolny podzbiór zbioru $\{1, \ldots, n\}$ należy do R.

   (*Wskazówka: rozważ działanie różnicy symetrycznej: $A \div B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$*)

4. (a) Sprawdź, że $\{n + 2\pi m : n, m \in \mathbb{Z}\}$ z działaniem dodawania jest podgrupą $\mathbb{R}$. Czy jest to podgrupa cykliczna?

   (b) Wykaż, że istnieje $n \in \mathbb{Z}$ takie, że $1,20252025 \leqslant \sin n < 1,20252026$.

5. (a) Sprawdź, że $\{n - m \cdot \log_2 5 : n, m \in \mathbb{Z}\}$ z działaniem dodawania jest podgrupą $\mathbb{R}$. Czy jest to podgrupa cykliczna?

   (b) Wykaż, że nieskończenie wiele potęg dwójki zaczyna się od cyfry 7.

   (*Wskazówka: Należy pokazać, że istnieją n, m takie, że $2^n/10^m \in [7, 8)$.*)

6. (a) Sprawdź, że $\{n\sqrt{2} + m\sqrt{3} : n, m \in \mathbb{Z}\}$ z działaniem dodawania jest podgrupą $\mathbb{R}$. Czy jest to podgrupa cykliczna?

   (b) Wykaż, że jeżeli funkcja f jest ciągła oraz jest zarówno $\sqrt{2}$-okresowa, jak i $\sqrt{3}$-okresowa, to jest funkcją stałą.

Działania grup na zbiorach

1. Określ liczbę sposobów, na jakie można pokolorować wierzchołki kwadratu dwoma kolorami. Dwa sposoby uznajemy za równoważne, gdy są takie same po obróceniu i/lub odbiciu kwadratu.

2. Określ liczbę sposobów, na jakie można pokolorować krawędzie kwadratu sześcioma kolorami. Dwa sposoby uznajemy za równoważne, gdy są takie same po obróceniu i/lub odbiciu kwadratu.

3. Kroimy ciasto na 6 identycznych kawałków. Na ile sposobów możemy pokolorować każdy kawałek jednym z n kolorów? Dwa sposoby uznajemy za równoważne, gdy są takie same po obróceniu ciasta.

4. Oblicz liczbę pokolorowań ścian sześcianu k kolorami. Dwa sposoby uznajemy za równoważne, gdy są takie same po pewnym obrocie sześcianu.

5. Znajdź liczbę *różnych* grafów na 5 wierzchołkach.