

**SFARA (SEMINARIUM Z FORM AUTOMORFICZNYCH I
ROZMAITOŚCI ABELOWYCH)
ROZMAITOŚCI ABELOWE**

Rozmaitość abelowa jest z definicji rzutową rozmaitością algebraiczną określoną nad ciałem algebraicznie domkniętym, która posiada strukturę grupy algebraicznej. Krzywe eliptyczne są jednowymiarowymi rozmaitościami abelowymi. Ważnym przykładem rozmaitości abelowej jest rozmaitość Jacobiego gładkiej krzywej rzutowej. Rozmaitości abelowe nad ciałem liczb zespolonych są torusami zespolonymi, które można realizować jako domknięte podrozmaitości przestrzeni rzutowych. Seminarium będzie oparte na [2] oraz [1]. Skupimy się głównie na zespolonych rozmaitościach abelowych.

- **Wykład 1: Rozmaitości abelowe nad $\mathbb{C}$.**

Przypomnienie: rozmaitości algebraiczne, morfizmy, odwzorowania wymierne, ciała funkcji. Definicja rozmaitości grupowej oraz rozmaitości abelowej ([1, p. 8]). Przykład: krzywa eliptyczna. Każde odwzorowanie regularne między rozmaitościami abelowymi jest złożeniem homomorfizmu z translacją ([1, Corollary 1.2] — można pominąć dowód twierdzenia o sztywności). Rozmaitości abelowe są przemienne ([1, Corollary 1.4]).

- **Wykłady 2–3: Torusy zespolone.**

Krótkie „przypomnienie”: grupy Liego i odwzorowanie wykładnicze (zob. np. [1, p. 10]). Definicja torusa zespolonego (por. [2, Definition 4.2]) oraz intuicja geometryczna (np. w $\mathbb{R}^2$). Każda rozmaitość abelowa jest torusem zespolonym ([2, Theorem 4.1], [1, Proposition 2.1]). Przypomnienie: kohomologia singularna (poprzez własności i przykłady, a nie formalne definicje). Kohomologia torusa ([1, p. 11]), formy Riemanna; torus zespolony jest rozmaitością abelową wtedy i tylko wtedy, gdy jest polaryzowalny ([1, Theorem 2.8]).

- **Wykład 4: Izogenie.**

Definicja izogenii, charakteryzacja izogenii ([1, Proposition 7.1]), stopień izogenii, grupa n -torsji $A[n]$ oraz stopień morfizmu mnożenia przez n nad $\mathbb{C}$ ([1, Theorem 7.2]) — dowód z wykorzystaniem opisu rozmaitości abelowej jako torusa (por. [2, Proposition 4.5]). Przykłady: mnożenie przez 2 na krzywej eliptycznej i 2-torsja; wielomiany podziałowe dla krzywej eliptycznej (opcjonalnie); mnożenie przez i na $y^2 = x^3 - x$ (tj. $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i]$). Definicja modułu

Tate'a i dowód, że $T_\ell A \cong \mathbb{Z}_\ell^{2g}$ jako grupa abelowa (por. [2, Definition 10.7] — wymaga pojęcia układu odwrotnego i granicy odwrotnej).

- **Wykład 5: Wiązki liniowe.**

Przypomnienie: wiązki wektorowe, wiązki liniowe w ujęciu topologicznym. Standardowe operacje na wiązkach wektorowych: obraz odwrotny, obraz prosty, iloczyn tensorowy. Wzmianka o związku z geometrią zespoloną i algebraiczną. Wiązki bardzo obfite i obfite. Grupa wiązek liniowych rozmaitości ($\text{Pic}(A)$).

Zastosowania do rozmaitości abelowych: twierdzenie o kwadracie i twierdzenie o sześciu wraz z wnioskami ([2, §1.3]) oraz alternatywne obliczenie stopnia $[n]$ (por. [2, Proposition 5.17]).

- **Wykłady 6–7: Rozmaitość abelowa dualna.**

Rozmaitość abelowa dualna — najpierw definicja w ujęciu analitycznym (por. [2, Definition 4.7]). Następnie definicja $\text{Pic}^0(A)$ ([2, p. 18]) oraz wprowadzenie definicji algebraicznej z wykorzystaniem wiązki Poincarégo $\mathcal{P}$ (por. [2, Definition 6.1]). Konstrukcja Mumforda przekształcenia λ_φ — [2, Definition 6.4]. Polaryzacja — w ujęciu analitycznym (por. [2, Definition 4.8]) i algebraicznym (por. [2, Definition 6.6]). Homomorfizm dualny ([2, Definition 6.10]) i jego własności. Inwolucja Rosatiego ([2, Definition 6.13]). Parowanie Weila ([2, Theorem 6.17] — można pokazać, jak jest definiowane na poziomie torusa, por. [1, Exercise 2.11]).

- **Wykłady 8–9: Endomorfizmy.**

Pierścień endomorfizmów, wielomian charakterystyczny endomorfizmu (warto naszkicować dowód [1, Theorem 10.9]). Definicja wielomianu charakterystycznego również poprzez moduł Tate'a (por. [1, p. 46]).

Prosta rozmaitość abelowa, twierdzenie o redukowalności Poincarégo ([2, Theorem 7.1], [1, Proposition 10.1]), definicja $\text{End}^0(A)$ oraz wyjaśnienie, dlaczego jest to algebra z dzieleniem ([1, p. 43]).

Część iniektywna hipotezy Tate'a ([1, Theorem 10.15]) oraz jej wnioski — $\text{rank Hom}(A, B) \leq 4 \dim A \cdot \dim B$, $\text{rank End}(A) \leq 4(\dim A)^2$. Wzmianka o hipotezie Tate'a (por. [1, Remark 10.17]). Wzmianka o klasyfikacji Alberta ([2, Chapter 3, Theorem 1.1]).

- **Wykłady 10–11: Jakobiany.**

Dzielniki na krzywych: stopień, dzielnik funkcji (dzielnik główny), grupa Picarda — [2, §9.1]. Sformułowanie własności uniwersalnej Jakobianu (por. [2, Proposition 9.18]) oraz związek z $\text{Pic}^0(C)$ (por. [2, Theorem 9.16]). Izomorfizm $H^0(C, \Omega_C) \cong H^0(J, \Omega_J)$ ([1,

Proposition 2.2]) oraz (opcjonalnie) $H^1(C, \mathcal{O}_C) \cong H^1(J, \mathcal{O}_J)$. Jeśli czas pozwoli, szkic konstrukcji Jakobianów — albo analitycznej ([3, A.6]), albo poprzez $\mathrm{Sym}^g(C)$ (por. [3, A.8]). Przykład: krzywa eliptyczna jest swoim własnym Jakobianem.

- **Wykłady 12–13: Dalsze własności rozmaitości abelowych.**

W zależności od preferencji prowadzącego, np. twierdzenie Mordella–Weila, reprezentacje ℓ -adyczne, hipoteza Mumforda–Tate’a, rozmaitości abelowe nad ciałami charakterystyki dodatniej itd.

LITERATURA

- [1] Milne, Abelian varieties, <https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/AV.pdf>
- [2] Lombardo, Abelian varieties, <https://people.dm.unipi.it/lombardo/Teaching/VarietaAbeliane1718/Notes.pdf>
- [3] Hindry, Silverman, Diophantine geometry