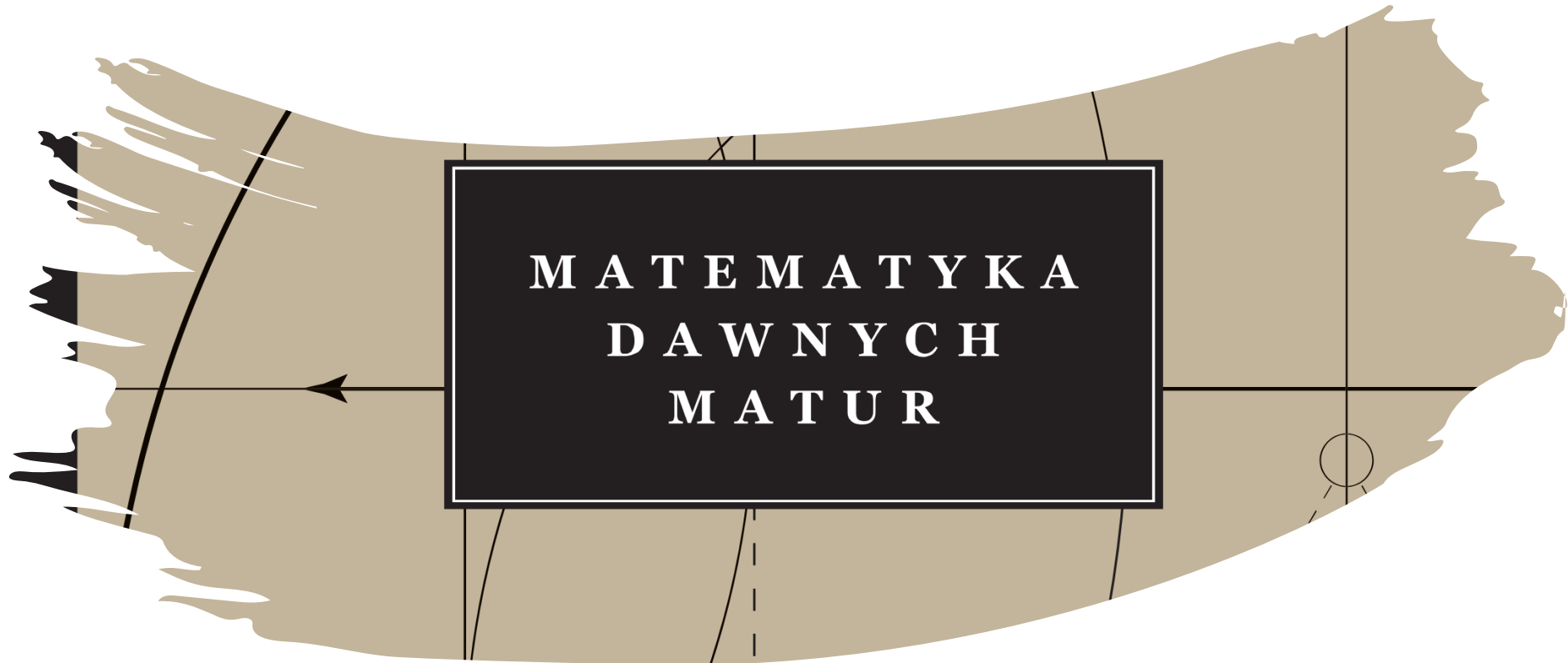




Jędrzej Garnek

LXVIII Szkoła Matematyki Poglądowej
„Na końcu nie zawsze jest odpowiedź”

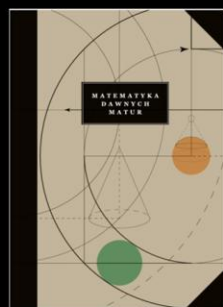
25.08.2025

Matematyka dawnych matur

- Wspólny projekt Archiwum Narodowego w Poznaniu oraz Koła Naukowego Matematyków UAM.
- Zbiór zadań z matur z lat 1892-1914 z terenów dzisiejszego zaboru pruskiego (Gniezno) wraz z rozwiązaniami i komentarzem – przebieg matury, materiał, porównanie z dzisiejszą maturą.
- Źródło – prace uczniów z Gimnazjum Królewskiego w Gnieźnie.
- Wersja elektroniczna dostępna darmowo na <https://jgarnek.faculty.wmi.amu.edu.pl/mdm>



**CEZARY
DUDKIEWICZ**



ZOFIA GOŁASKA



**DR MAREK
SZCZEPANIAK
(INICJATOR)**



**KLAUDIA
PIWOWARCZYK**



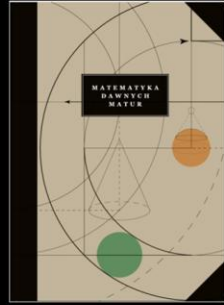
**ADRIANNA
SMOLIŃSKA
(REDAKTORKA)**



ADAM NAWROCKI



**JA
(REDAKTOR)**





znajdź.ap.gov

ARCHIWUM
PAŃSTWOWE
W POZNANIU

PYTANIE 1:

skąd wzięły się matury?

Problemy uczelni

- Studenci z bardzo zróżnicowanym poziomem wiedzy i umiejętności.
- Na uczelni trafiały osoby niezdolne do samodzielnych studiów i pracy naukowej.
- „Tłumy” nieprzygotowanych studentów zmuszały wykładowców do obniżania poziomu i zakresu materiału.
- Egzaminy wstępne niewystarczająco weryfikowały kompetencje kandydatów.
- Brak jednolitych programów nauczania i sposobów oceniania w szkołach średnich.



Problemy uczelni

- Studenci z bardzo zróżnicowanym poziomem wiedzy i umiejętności.
- Na uczelni trafiały osoby niezdolne do samodzielnych studiów i pracy naukowej.
- „Tłumy” nieprzygotowanych studentów zmuszały wykładowców do obniżania poziomu i zakresu materiału.
- Egzaminy wstępne niewystarczająco weryfikowały kompetencje kandydatów.
- Brak jednolitych programów nauczania i sposobów oceniania w szkołach średnich.

XVIII - WIECZNY
UNIWERSYTET



NIEZADOLNOŚĆ
WYKŁADOWCÓW



Pomysł

- Hoffman (kanclerz uniwersytetu w Halle), 1787 r.: wniosek do Ober-Schul-Kollegium o wprowadzenie egzaminów kończących szkoły średnie,
- Zaproponował odejście od klasycznej edukacji (greka, łacina) na rzecz zagadnień związanych z życiem codziennym.
- Już w 1789 r. - pierwsze matury w 35 szkołach, w tym w Malborku oraz w Elblągu.



PYTANIE 2:

kto układał zadania?

PYTANIE 2:

kto układał zadania?



*

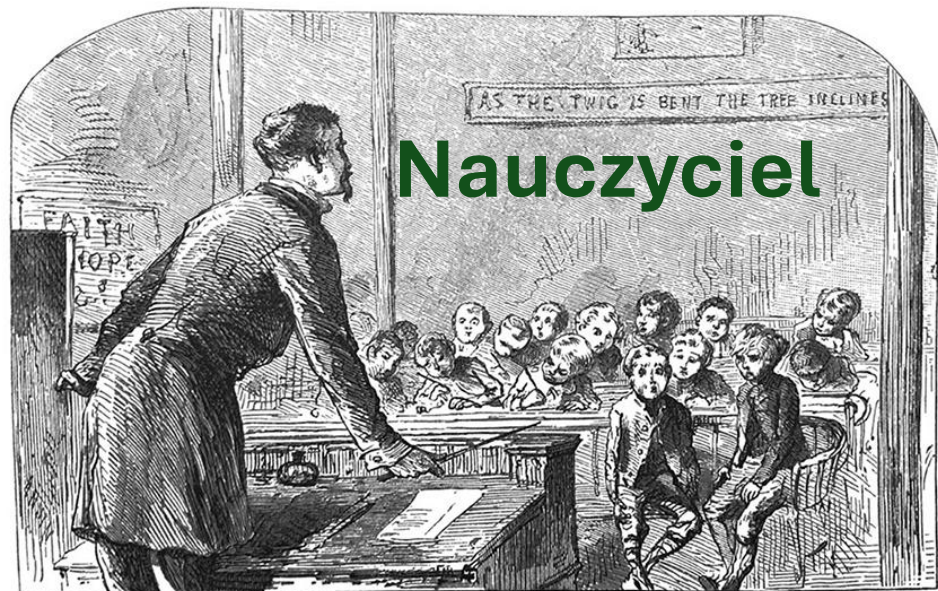
* po wprowadzeniu nowych zasad w 1883 r.



**Królewskie Prowincjonalne
Kolegium Szkolne w Poznaniu**



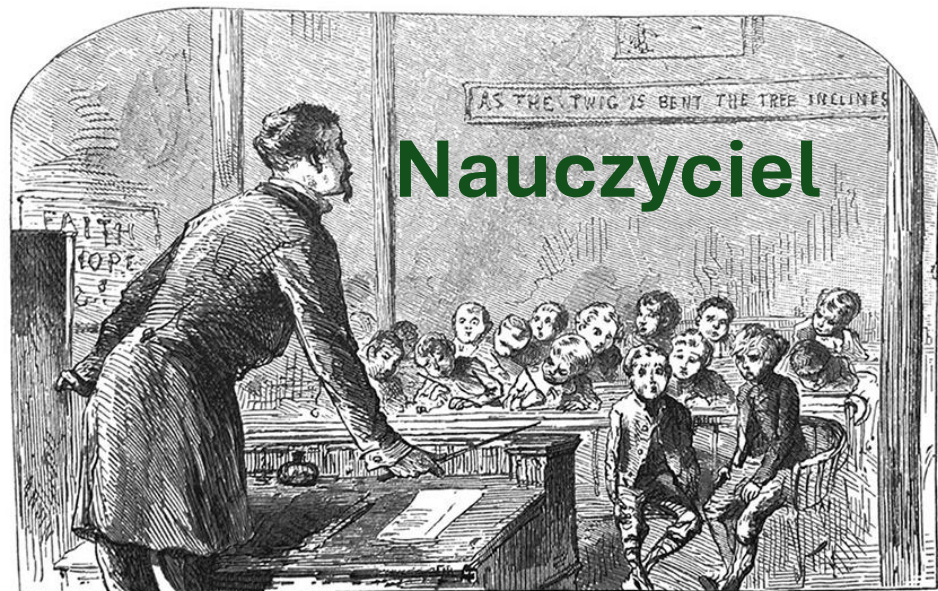
**Królewskie Prowincjonalne
Kolegium Szkolne w Poznaniu**



Nauczyciel



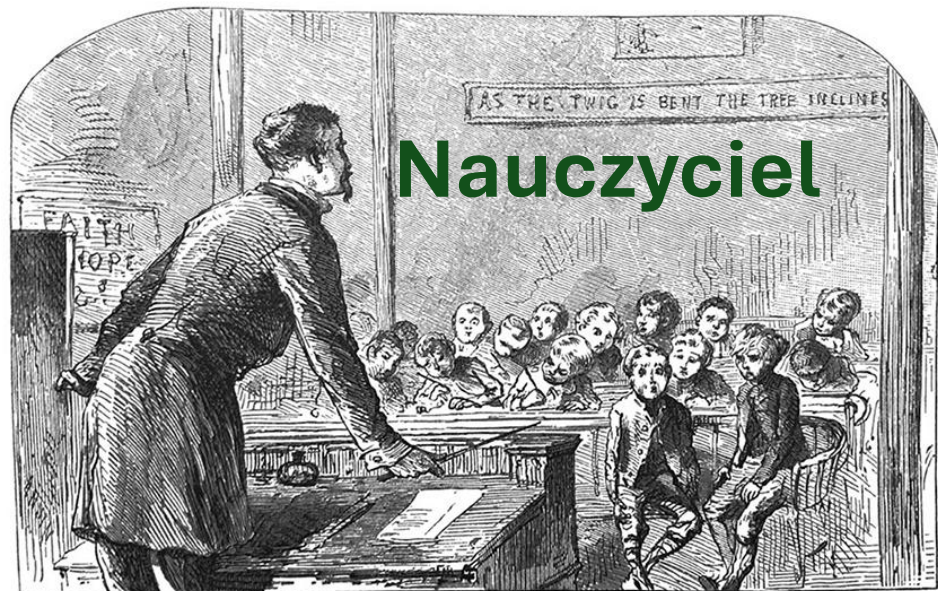
Królewskie Prowincjonalne
Kolegium Szkolne w Poznaniu



Nauczyciel



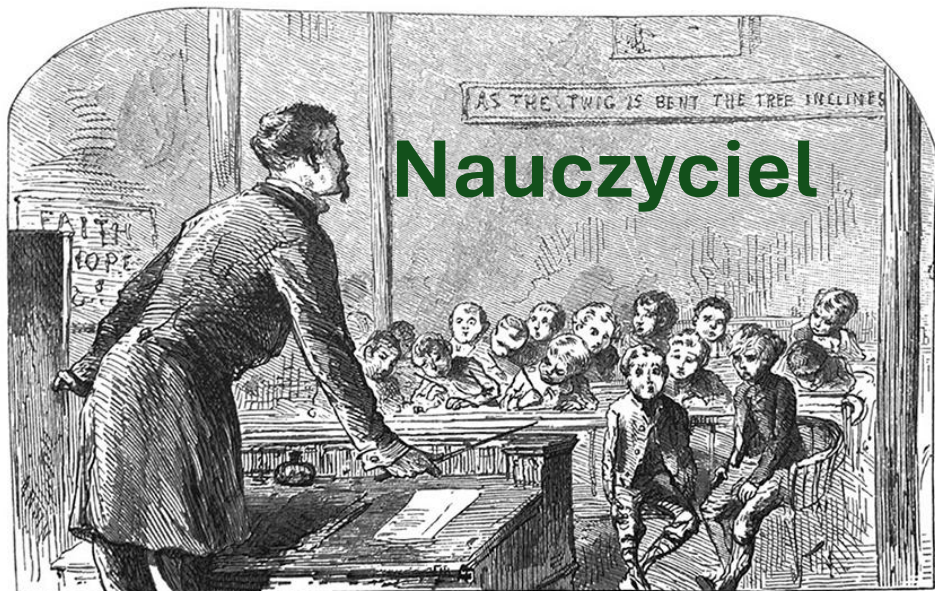
Królewskie Prowincjonalne
Kolegium Szkolne w Poznaniu



Nauczyciel



Królewskie Prowincjonalne
Kolegium Szkolne w Poznaniu



Nauczyciel



Dzieciaczki



Królewskie Prowincjonalne Kolegium Szkolne w Poznaniu

PYTANIE 3:

ilu abiturientów

przystępowało do egzaminu?

Świadectwo dojrzałości		Świadectwo niedojrzałości	
Kierunek	Miejsce studiów	Kierunek	Miejsce studiów
39 osób teologia 23 prawo 2 matematyka 1 medycyna 1 filologia	102 osoby Halle 10 Frankfurt 8 Królewiec 3 Duisburg 2 Lingen	8 osób prawo 7 teologia 1 muzyka	20 osób Halle 3 Frankfurt 1 Królewiec
Brak danych: 73 osoby	Brak danych: 14 osób	Brak danych: 27 osób	Brak danych: 19 osób

Statystyki z 1789 r.

- Łącznie: 182 abiturientów,
- Zdawalność: 76 %

O 1892 – 10	O 1894 – 7	M 1895 – 9	O 1895 – 9
M 1896 – 1	O 1897 – 8	O 1898 – 7	O 1899 – 9
O 1901 – 7	O 1902 – 6	O 1903 – 7	O 1904 – 8
O 1905 – 9	O 1906 – 12	H 1906 – 2	O 1907 – 11
O 1908 – 10	O 1909 – 17	M 1909 – 4	O 1910 – 11
O 1911 – 21	M 1911 – 1	O 1912 – 11	O 1913 – 14
O 1914 – 19	AL 1915 – 17	AZ 1915 – 1	O 1915 – 2

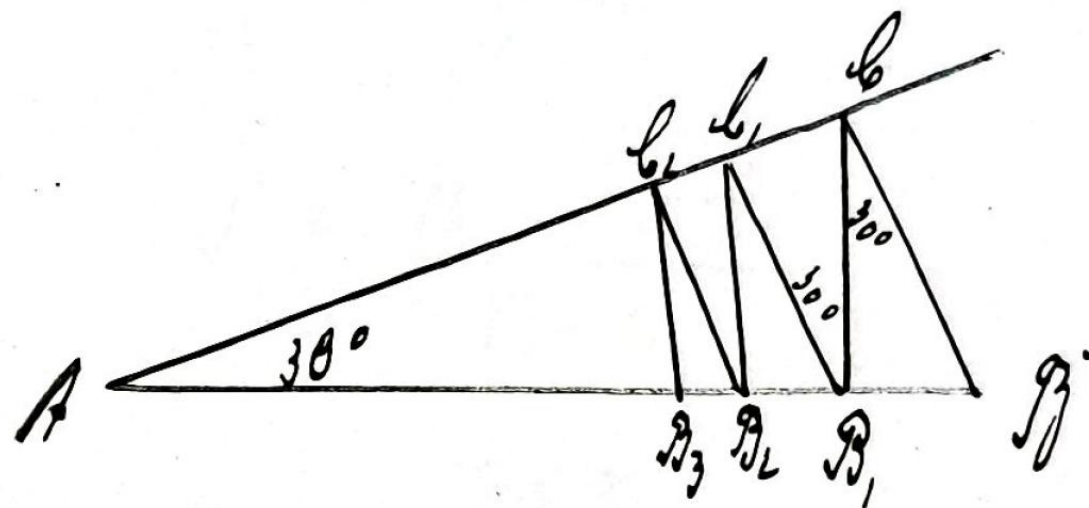
- Statystyki z Gniezna

PYTANIE 4:
jak przebiegała matura?

Daty

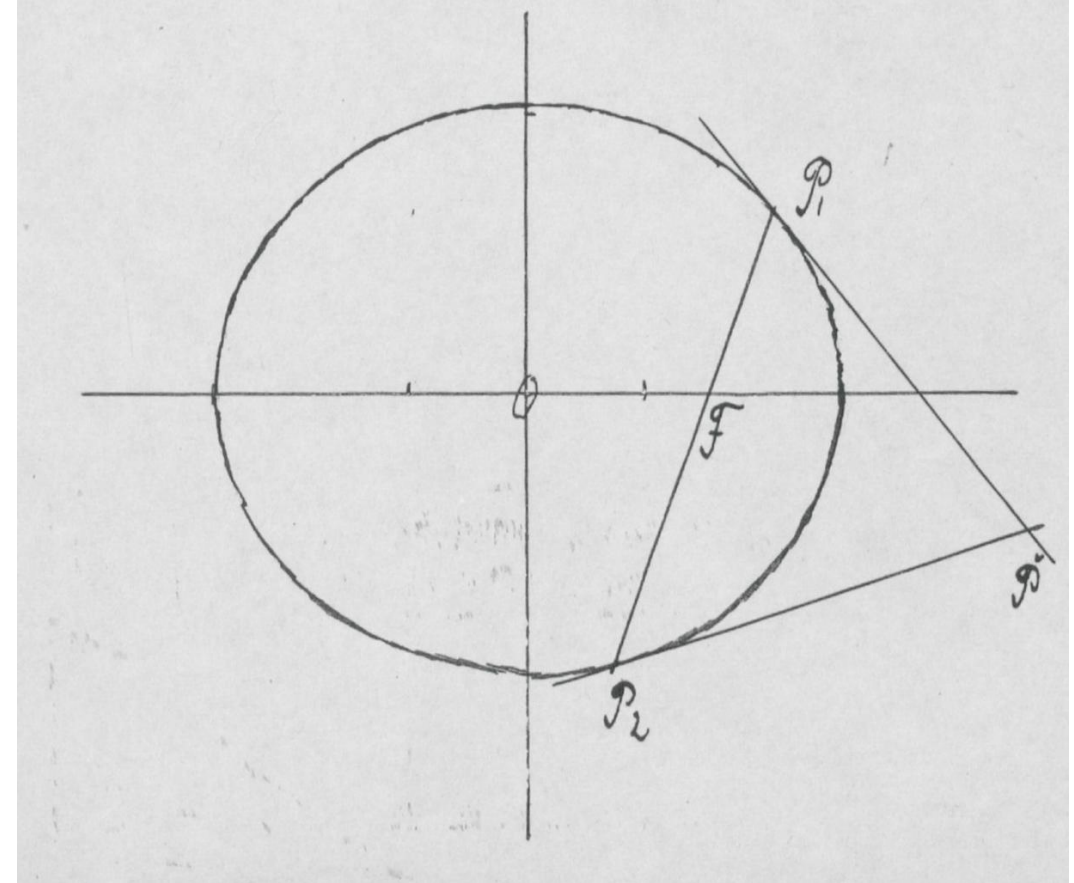
Wszystkie daty roku szkolnego zależały w dużej mierze od daty Wielkanocy:

- Rok szkolny w gimnazjum rozpoczynał się dwutygodniowymi feriami wielkanocnymi,
- Egzaminy „Świętomichalskie” na początku września (koniec semestru letniego),
- Egzaminy „Wielkanocne” na przełomie stycznia i lutego (koniec semestru zimowego),
- Lipiec – wakacje „żniwne”.



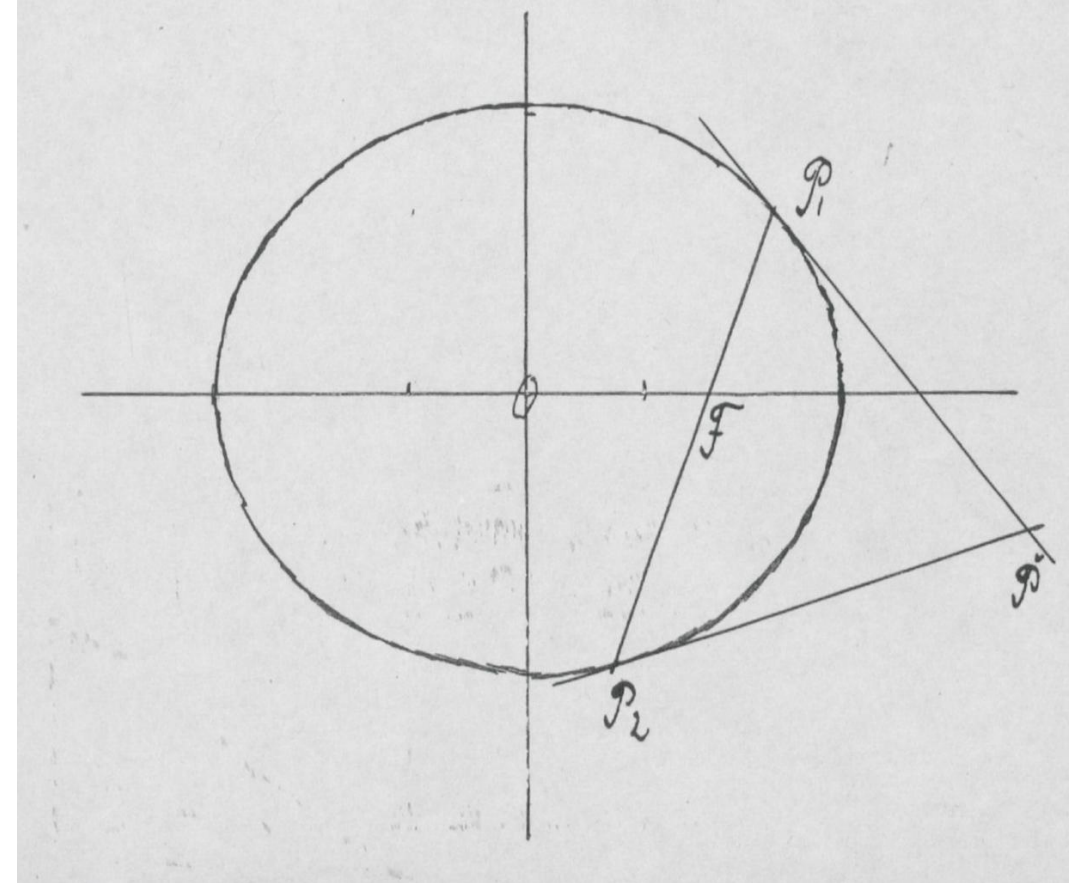
Klasy

- Prima (klasa pierwsza)
- Secunda (klasa druga),
- Tertia (klasa trzecia),
- Quarta (klasa czwarta),
- Quinta (klasa piąta),
- Sexta (klasa szósta).



Klasy

- Ober/ Unter Prima (klasa pierwsza wyższa/niższa)
- Ober/Unter Secunda (klasa druga wyższa/niższa),
- Ober/Unter Tertia (klasa trzecia wyższa/niższa),
- Quarta (klasa czwarta),
- Quinta (klasa piąta),
- Sexta (klasa szósta).



Co zdawano

- **Egzamin maturalny** miał dwie części: pisemną i ustną.
- **Część lingwistyczna:**
 - Wypracowanie w języku niemieckim
 - Wypracowanie w języku łacińskim
 - Tłumaczenie z niemieckiego na łacinę
 - Tłumaczenie z greckiego na niemiecki
- **Część matematyczna.**
- **Pozostałe przedmioty - nieobowiązkowe.**

$$; \ell \ell = 65^{\circ} 30'$$

$$\log \ell \ell - \log \ell \ell$$

$$20,05264 - 20$$

$$10,34130^{(4)} - 10$$

$$= 9,77134$$

$$= 58^{\circ} 3' - 37''$$

$$= 58^{\circ} 2' 23''$$

$$= \alpha + \ell \ell \ell$$

$$= 78^{\circ} 22' 23''$$

$$= \ell \ell \cdot \cos \ell \ell + \sin \ell \ell \cdot \sin \ell \ell$$

$$= 40^{\circ}; \ell \ell = 48^{\circ} 22' 51'' \cdot \cos \ell \ell$$

$$= 78^{\circ} 22' 23''$$

$$\log \sin \ell \ell = 9,80802$$

$$\log \sin \ell \ell = 9,87421$$

$$\log \cos \ell \ell = 9,26241$$

$$\text{Summa} = 28,94469 - 30$$

$$\text{Num } 0,94469 - 2 = 0,08804$$

$$\sin \ell \ell \cdot \sin \ell \ell \cdot \cos \ell \ell = 0,08804$$

$$\cos \ell \ell = 0,50812 + 0,08804$$

$$\cos \ell \ell = 0,59621$$

$$\log 0,59621 = 9,77540$$

$$\log \cos \ell \ell = 9,77540$$

$$\ell \ell = 53^{\circ} 24' \quad | \quad 53 \frac{24}{60} = 53 \frac{2}{5}$$

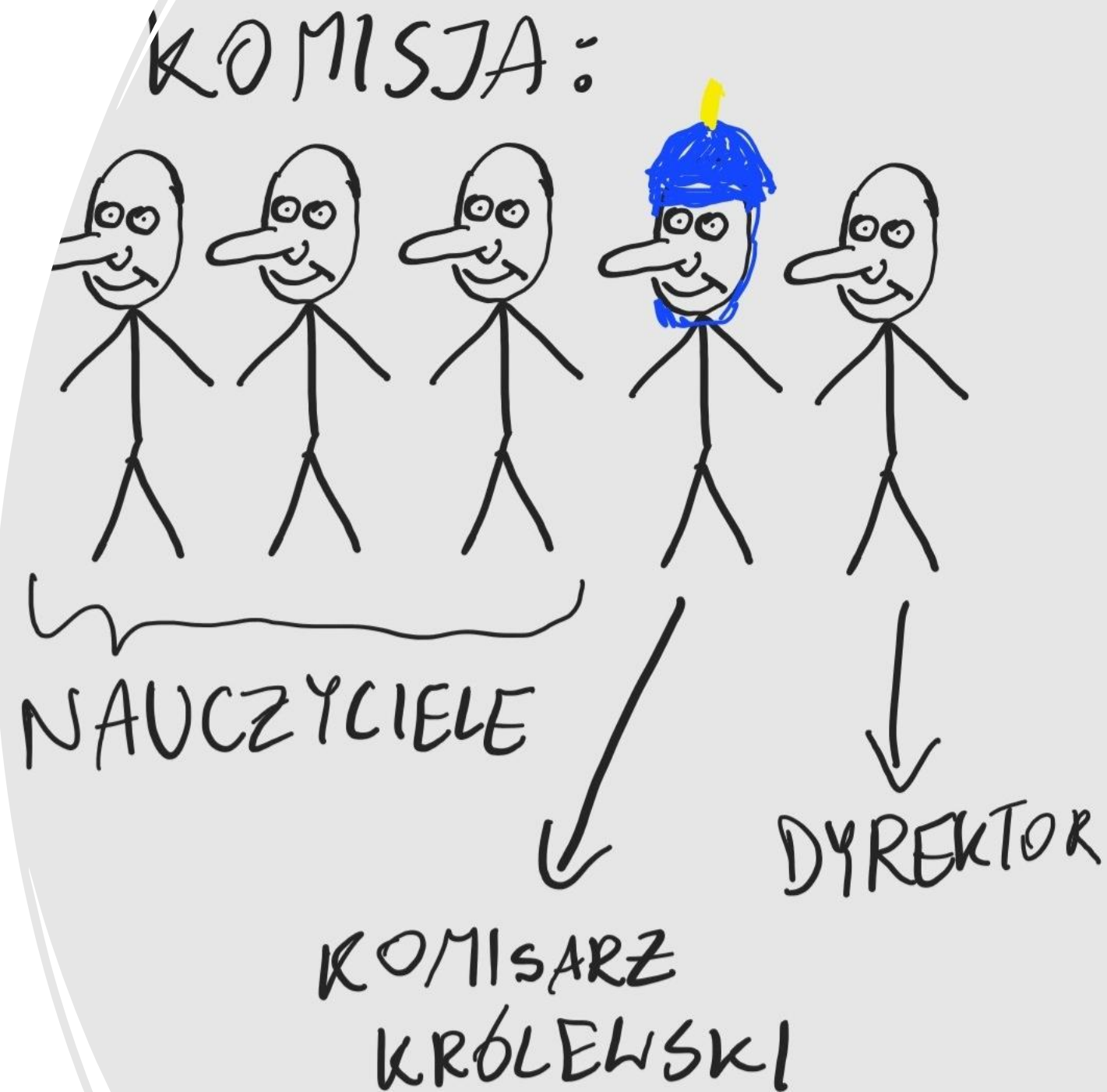
$$\text{Próf } 1^{\circ} \text{ konstant } 15 \text{ milim}$$

$$\text{Próf } (53 \frac{2}{5})^{\circ} \quad | \quad 15 \cdot 53 \frac{2}{5}$$

$$15 \cdot 53 \frac{2}{5} = 15 \cdot \frac{267}{5} = 801$$

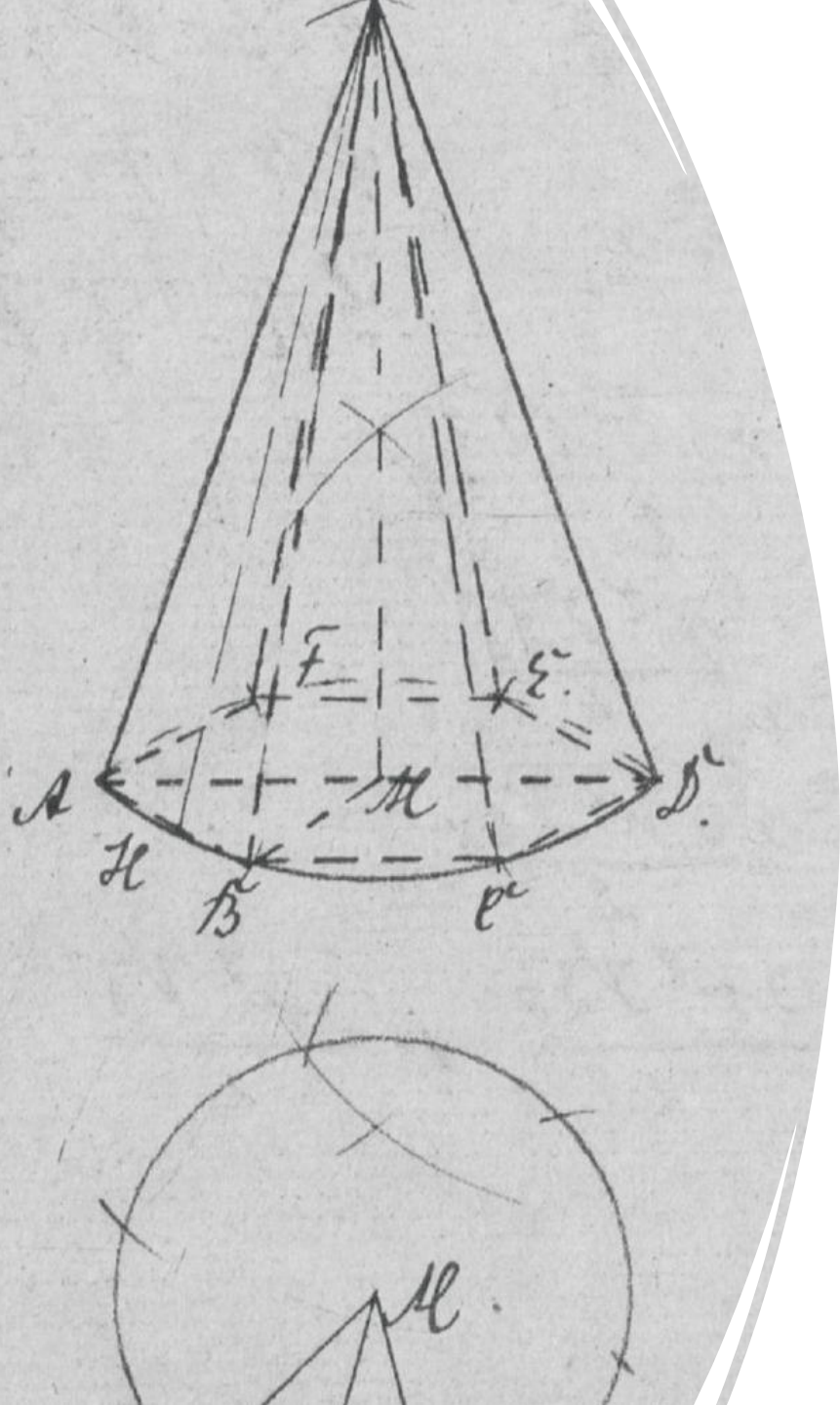
Egzamin ustny

- Do komisji należeli wszyscy nauczyciele z danej szkoły oraz Komisarz Królewski.
- Każdy przedmiot zdawany był przed nauczycielem, który wykładał go w najwyższej klasie. Komisarz miał jednak prawo do zadawania dodatkowych pytań oraz do samodzielnego przeprowadzenia egzaminu.
- Z egzaminu ustnego zwolnieni byli Ci, którym matura poszła dostatecznie źle oraz dostatecznie dobrze (jednomyślna decyzja nauczycieli, brano pod uwagę zachowanie).



Część pisemna – matematyczna

- Wybór jednego z trzech zestawów (każdy: 4 zadania – planimetria, stereometria, trygonometria, algebra)
- Jedno z zadań powinno umożliwiać wykazanie się znajomością fizyki.
- **Czas:** 5h
- Egzamin matematyczny mógł być podzielony na 2 części (2+2 zadania)



PYTANIE 5:
jaki materiał obowiązywał?

Rechnen. Kopfrechnen im Zahlenkreise von 1—1000. Münzen, Masse und Gewichte, Einmaleins mit Währungszahlen und Vielfachen von 10. Schriftliches Rechnen nach dem Rechenheft von Blümel Teil II und III. 5 Stdn. Weise.

Rechnen. Wiederholung der Grundrechnungsarten mit benannten und unbenannten ganzen Zahlen. Resolvieren, Reduzieren, Zeitrechnung. Die deutschen Münzen, Masse und Gewichte. Übungen in der dezimalen Schreibweise und den einfachsten Dezimalrechnungen. 4 Stdn wöchentlich. In A Schnee, in B Sturtzel.

Rechnen. Bruchrechnung. Einfache Regeldetri und Zinsaufgaben. Einführung in die Rechnung mit Decimalbrüchen. 4 Stdn. in A und B Wittrien.

Obliczenia pamięciowe w zakresie liczb od 1 do 1000. Monety, tabliczka mnożenia z liczbami walutowymi i wielokrotnościami 10. Zgodnie z zeszytem ćwiczeń Blümela, część II i III. Miary i wagi, obliczenia pisemne.

Liczby całkowite. Powtórzenie podstawowych działań na liczbach nazwanych i nienazwanych, rozwiązywanie równań, redukcja, obliczanie czasu. Niemieckie monety, miary i wagi. Ćwiczenia w zapisie dziesiętnym oraz w najprostszych obliczeniach dziesiętnych.

Działania na ułamkach zwykłych. Proste zadania z reguły trzech i obliczania odsetek. Wprowadzenie do rachunków z ułamkami dziesiętnymi.

Mathematik. Planimetrie: Die Lehre von den Geraden, Winkeln und Dreiecken. Einfache Konstruktionsaufgaben. 2 Stunden, in A und B Wittrien.

Mathematik. Arithmetik: Im Sommer 2 Stunden, im Winter 1 Stunde wöchentlich. Die Grundrechnungsarten mit allgemeinen Zahlen. Zerlegen von Summen und Differenzen in Faktoren. Das Heben der Brüche. Gleichungen mit einer Unbekannten. Geometrie: Im Sommer 1 Stde., im Winter 2 Stdn. wöchentlich. Lehre vom Parallelogramm, Trapez und Kreise. Lösung leichterer Konstruktionsaufgaben. 3 Stdn. Schnee. Bis 21. November in A Sturtzel.

Mathematik. a) Arithmetik: Lehre von den Proportionen, Potenzen und Wurzeln. Gleichungen des ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Planimetrie: Vergleichung des Flächeninhalts geradliniger Figuren. Lehre von der Proportionalität und Ähnlichkeit der Figuren 3 Stdn. wöchentlich. Sturtzel.

Nauka o prostych, kątach i trójkątach. Proste zadania konstrukcyjne.

Podstawowe działania na liczbach ogólnych. Rozkładanie sum i różnic na czynniki. Operacje na ułamkach. Równania z jedną niewiadomą. Geometria. Nauka o równoległobokach, trapezach i okręgach. Rozwiązywanie prostszych zadań konstrukcyjnych.

Arytmetyka: Nauka o proporcjach, potęgach i pierwiastkach. Równania pierwszego stopnia z jedną i wieloma niewiadomymi. Planimetria: Porównywanie pól powierzchni figur prostoliniowych. Nauka o proporcjonalności i podobieństwie figur.

Mathematik. 4 Stdn. wöchentlich. Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten besonders quadratische Gleichungen und in Worte gekleidete Aufgaben. Definition des Logarithmus und die wichtigsten Sätze über Logarithmen. Übungen im Rechnen mit Logarithmen. Wiederholung der Potenz- und Wurzellehre. Berechnung des Kreises, des Sektors und des Kreissegmentes. Definition der trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck. Trigonometrische Berechnung von Dreiecken, wobei besonders Aufgaben aus dem praktischen Leben berücksichtigt wurden. Berechnung des Volumens und der Oberfläche von Prismen, Pyramiden, Cylindern, Kegeln und Kugeln. Sturtzel.

Mathematik. Die Lehre von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen. Gleichungen einschliesslich der quadratischen mit mehreren Unbekannten. Arithmetische und geometrische Reihen erster Ordnung. Abschluss der Ähnlichkeitslehre und geometrische Konstruktionsaufgaben. Ebene Trigonometrie nebst Übungen im Berechnen von Dreiecken und Vierecken. 4 Stdn. Schnee.

Mathematik. Der Koordinatenbegriff und einige Grundlehren von den Kegelschnitten. Aufgaben aus allen Gebieten der Geometrie und Stereometrie. Vervollständigung der Trigonometrie. Zinseszins- und Rentenrechnung. 4 Stdn. Schnee.

Aufgaben für die schriftliche Reifeprüfung vor Ostern 1901:

- 1) In einem Walde, der 10000 Kubikmeter Holz enthält und dessen Zuwachs jährlich 5% beträgt, werden zu Ende eines jeden Jahres 800 Kubikmeter Holz geschlagen. Wie viel Kubikmeter wird der Wald nach 10 Jahren noch enthalten?
- 2) Eine gegebene Sehne a eines gegebenen Kreises soll so verlängert werden, dass die von ihrem Endpunkte an den Kreis konstruierte Tangente gleich der Summe aus der halben Verlängerung der Sehne und einer gegebenen Strecke b ist.
- 3) $F=84$; $r=8,125$; $a=13$. Die übrigen Stücke des Dreiecks zu berechnen.
- 4) Eine Kugel von dem Radius R sei in der Entfernung des halben Radius vom Mittelpunkt durch eine Ebene durchschnitten. In dem Schnittkreise sei ein Quadrat einbeschrieben und über diesem in dem grösseren Kugelabschnitte eine gerade Pyramide konstruiert, deren Spitze in der Kugelfläche liegt. Wie gross ist der Inhalt und die Oberfläche dieser Pyramide und wie gross ist der Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche? ev. freiwillig — der Neigungswinkel der Seitenflächen gegen einander?

Równania z jedną i wieloma niewiadomymi, ze szczególnym uwzględnieniem równań kwadratowych oraz zadań tekstowych. Definicja logarytmu i najważniejsze twierdzenia dotyczące logarytmów. Obliczenia z wykorzystaniem logarytmów. Powtórzenie nauki o potęgach i pierwiastkach. Obliczenia dotyczące koła, wycinka kołowego i odcinka kołowego. Definicja funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym. Trygonometryczne obliczenia trójkątów, z uwzględnieniem zadań praktycznych z życia codziennego. Obliczenia objętości i powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walców, stożków i kul.

Nauka o potęgach, pierwiastkach i logarytmach. Równania, w tym kwadratowe z kilkoma niewiadomymi. Ciągi arytmetyczne i geometryczne pierwszego rzędu. Uzupełnienie teorii podobieństwa oraz zadania z konstrukcji geometrycznych. Obliczenia dotyczące trójkątów i czworokątów. Trygonometria płaska wraz z ćwiczeniami w obliczaniu trójkątów i czworokątów.

Pojęcie współrzędnych oraz **niektóre podstawy teorii krzywych stożkowych**. Zadania ze wszystkich dziedzin geometrii płaskiej i przestrzennej. Uzupełnienie trygonometrii. Obliczenia procentu składanego i rent.

Mathematik. 4 Stdn. wöchentlich. Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten besonders quadratische Gleichungen und in Worte gekleidete Aufgaben. Definition des Logarithmus und die wichtigsten Sätze über Logarithmen. Übungen im Rechnen mit Logarithmen. Wiederholung der Potenz- und Wurzellehre. Berechnung des Kreises, des Sektors und des Kreissegmentes. Definition der trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck. Trigonometrische Berechnung von Dreiecken, wobei besonders Aufgaben aus dem praktischen Leben berücksichtigt wurden. Berechnung des Volumens und der Oberfläche von Prismen, Pyramiden, Cylindern, Kegeln und Kugeln. Sturtzel.

Mathematik. Die Lehre von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen. Gleichungen einschliesslich der quadratischen mit mehreren Unbekannten. Arithmetische und geometrische Reihen erster Ordnung. Abschluss der Ähnlichkeitslehre und geometrische Konstruktionsaufgaben. Ebene Trigonometrie nebst Übungen im Berechnen von Dreiecken und Vierecken. 4 Stdn. Schnee.

Mathematik. Der Koordinatenbegriff und einige Grundlehren von den Kegelschnitten. Aufgaben aus allen Gebieten der Geometrie und Stereometrie. Vervollständigung der Trigonometrie. Zinsrechnung und Rentenrechnung. 4 Stdn. Schnee.

Aufgaben für die schriftliche Reifeprüfung vor Ostern 1901:

- 1) In einem Walde, der 10000 Kubikmeter Holz enthält und dessen Zuwachs jährlich 5% beträgt, werden zu Ende eines jeden Jahres 800 Kubikmeter Holz geschlagen. Wie viel Kubikmeter wird der Wald nach 10 Jahren noch enthalten?
- 2) Eine gegebene Sehne a eines gegebenen Kreises soll so verlängert werden, dass die von ihrem Endpunkte an den Kreis konstruierte Tangente gleich der Summe aus der halben Verlängerung der Sehne und einer gegebenen Strecke b ist.
- 3) $F=84$; $r=8,125$; $a=13$. Die übrigen Stücke des Dreiecks zu berechnen.
- 4) Eine Kugel von dem Radius R sei in der Entfernung des halben Radius vom Mittelpunkt durch eine Ebene durchschnitten. In dem Schnittkreise sei ein Quadrat einbeschrieben und über diesem in dem grösseren Kugelabschnitte eine gerade Pyramide konstruiert, deren Spitze in der Kugelfläche liegt. Wie gross ist der Inhalt und die Oberfläche dieser Pyramide und wie gross ist der Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche? ev. freiwillig — der Neigungswinkel der Seitenflächen gegen einander?

Równania z jedną i wieloma niewiadomymi, ze szczególnym uwzględnieniem równań kwadratowych oraz zadań tekstowych. Definicja logarytmu i najważniejsze twierdzenia dotyczące logarytmów. Obliczenia z wykorzystaniem logarytmów. Powtórzenie nauki o potęgach i pierwiastkach. Obliczenia dotyczące koła, wycinka kołowego i odcinka kołowego. Definicja funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym. Trygonometryczne obliczenia trójkątów, z uwzględnieniem zadań praktycznych z życia codziennego. Obliczenia objętości i powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walców, stożków i kul.

Nauka o potęgach, pierwiastkach i logarytmach. Równania, w tym kwadratowe z kilkoma niewiadomymi. Ciągi arytmetyczne i geometryczne pierwszego rzędu. Uzupełnienie teorii podobieństwa oraz zadania z konstrukcji geometrycznych. Obliczenia dotyczące trójkątów i czworokątów. Trygonometria płaska wraz z ćwiczeniami w obliczaniu trójkątów i czworokątów.

Pojęcie współrzędnych oraz **niektóre podstawy teorii krzywych stożkowych**. Zadania ze wszystkich dziedzin geometrii płaskiej i przestrzennej. Uzupełnienie trygonometrii. Obliczenia procentu składanego i rent.

Kombinatoryka

Czego
brakuje?

Zadanie 6. (0–3)

Rozważamy wszystkie liczby naturalne, w których zapisie dziesiętnym nie powtarza się jakakolwiek cyfra oraz dokładnie trzy cyfry są nieparzyste i dokładnie dwie cyfry są parzyste.

Oblicz, ile jest wszystkich takich liczb. Zapisz obliczenia.

Matura rozszerzona, maj 2024 r.



Czego
brakuje?

Rachunek prawdopodobieństwa

Zadanie 3. (0–3)

W pewnym zakładzie mleczarskim śmietana produkowana jest w 200-gramowych opakowaniach. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że w losowo wybranym opakowaniu śmietana zawiera mniej niż 36% tłuszczu, jest równe 0,01. Kontroli poddajemy 10 losowo wybranych opakowań ze śmietaną.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wśród opakowań poddanych tej kontroli będzie co najwyżej jedno opakowanie ze śmietaną, która zawiera mniej niż 36% tłuszczu. Wynik zapisz w postaci ułamka dziesiętnego w zaokrągleniu do części tysięcznych. Zapisz obliczenia.

Matura rozszerzona, maj 2024 r.

Czego
brakuje?

Granica ciągu

Zadanie 2. (0–2)

Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 8}{(x - 2)^2}$$

Zapisz obliczenia.

Matura rozszerzona, maj 2024 r.



Czego
brakuje?

Dowodzenie (nierówności, geometria)

Zadanie 2. (0–3)

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej a i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej b takich, że $b \neq \frac{1}{2}a$, prawdziwa jest nierówność

$$(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$$

Matura rozszerzona, maj 2025 r.

Zadanie 8. (0–4)

Dany jest trójkąt ABC , który nie jest równoramienny. W tym trójkącie miara kąta ABC jest dwa razy większa od miary kąta BAC .

Wykaż, że długości boków tego trójkąta spełniają warunek

$$|AC|^2 = |BC|^2 + |AB| \cdot |BC|$$

Matura rozszerzona, maj 2024 r.

PYTANIE 6:
jak oceniano matury?

Die Gleichung der Tangenten heißt:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{y - 0}{x + \sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$ax + a\sqrt{a^2 - b^2} = y\sqrt{a^2 - b^2}$$

$$y = x \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} + a$$

Die Gleichung der Tangenten

heißt: $y = x \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} + a$

H.

Kleiner Raufasser, | $a = 10,062 \text{ cm}$
der nur auf Flüssigkeit
beruht.

Drobny błąd matematyczny!
Jest to tylko kwestia przecinka.

Da das richtige Resultat ist die Lösung
von der folgenden Aufgabe.

W dalszym ciągu rozwiązanie jest
poprawne mimo błędnego założenia.

2. Teil — abzulegen.

Pominięte znaki.

die Annahme ist falsch.

Założenie jest błędne.

welche Schnittfläche ist
gemeint?

O którą powierzchnię cięcia chodzi?

Der Divisor 2.56 ist
überhaupt gabelbar.

Dzielnik 2.56 został pominięty.

Die Zahlen für die
Kupferung bei der
Kupferung sind dann
Kupferung sind dann

Obliczenia można znacznie uprościć.

Ann

4.) Eine hölzerne Pyramide
deren Höhe $h = 15,5 \text{ cm}$ beträgt,
schwimmt im Wasser mit wa-
gerachter Grundfläche so, daß die
Spitze $h_1 = 9,3 \text{ cm}$ hoch über dem
Wasserspiegel hinausragt. Welches
ist ihr spezifisches Gewicht?

V. nach Sonnenzeit war
noch in A. Zeit zu vermindern
Die Lösung ist der. ganz
nichtig, das Ergebnis ist
infolge dieser Blätter
Vorfass nicht sehr genau.

Pozostało przeliczyć prawdziwy czas słoneczny na czas lokalny.
Rozwiązanie jest poprawne jako całość, wynik nie jest dokładny w
wyniku dwóch przeoczeń.

K. wykazuje się bardzo
dobrą i pewną wiedzą w
4 zadaniach i zadaniu
dodatkowym.

„Bardzo dobry”

Postępy klasowe są
dobre.

Dr. Huss

H. zeigt in den 4 Hauptaufgaben und in
der Extra-Aufgabe eine sehr gute
und sichere Misse.

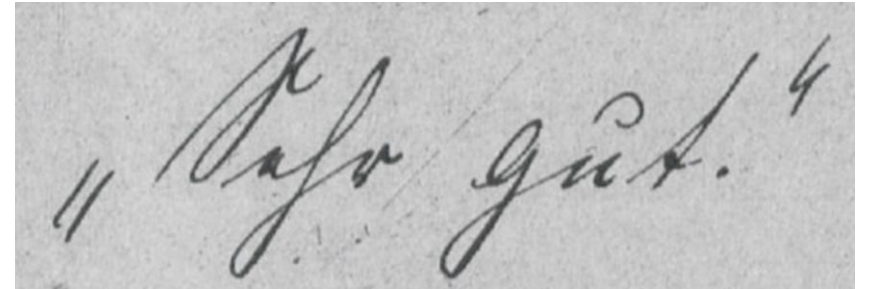
„Sehr gut.”

Die Klassenleistungen sind gut.

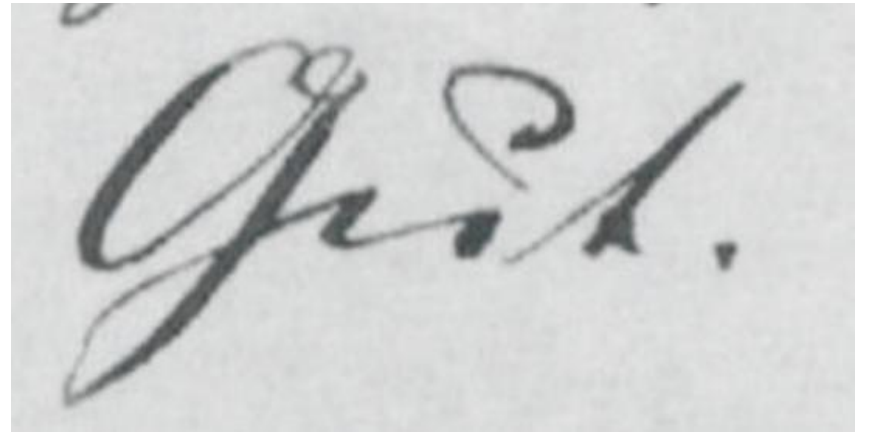
Dr. Huss.

Ocenianie

- **Skala ocen:**
 - *sehr gut* – bardzo dobry
 - *gut* – dobry
 - *genügend* – wystarczający
 - *ungenügend/nichtgenügend* – niewystarczający
- Pracę najpierw sprawdzał nauczyciel, potem członkowie Komisji Egzaminacyjnej. Królewski Komisarz mógł zmienić ocenę prac.
- Oszustwo skutkowało wykluczeniem z egzaminu, zaś recydywa – z matury (za decyzją ministra).



Handwritten text: "sehr gut." with a superscript 4.



Handwritten text: "gut."

PYTANIE 7:
jak wyglądały zadania?

Gwiazdy

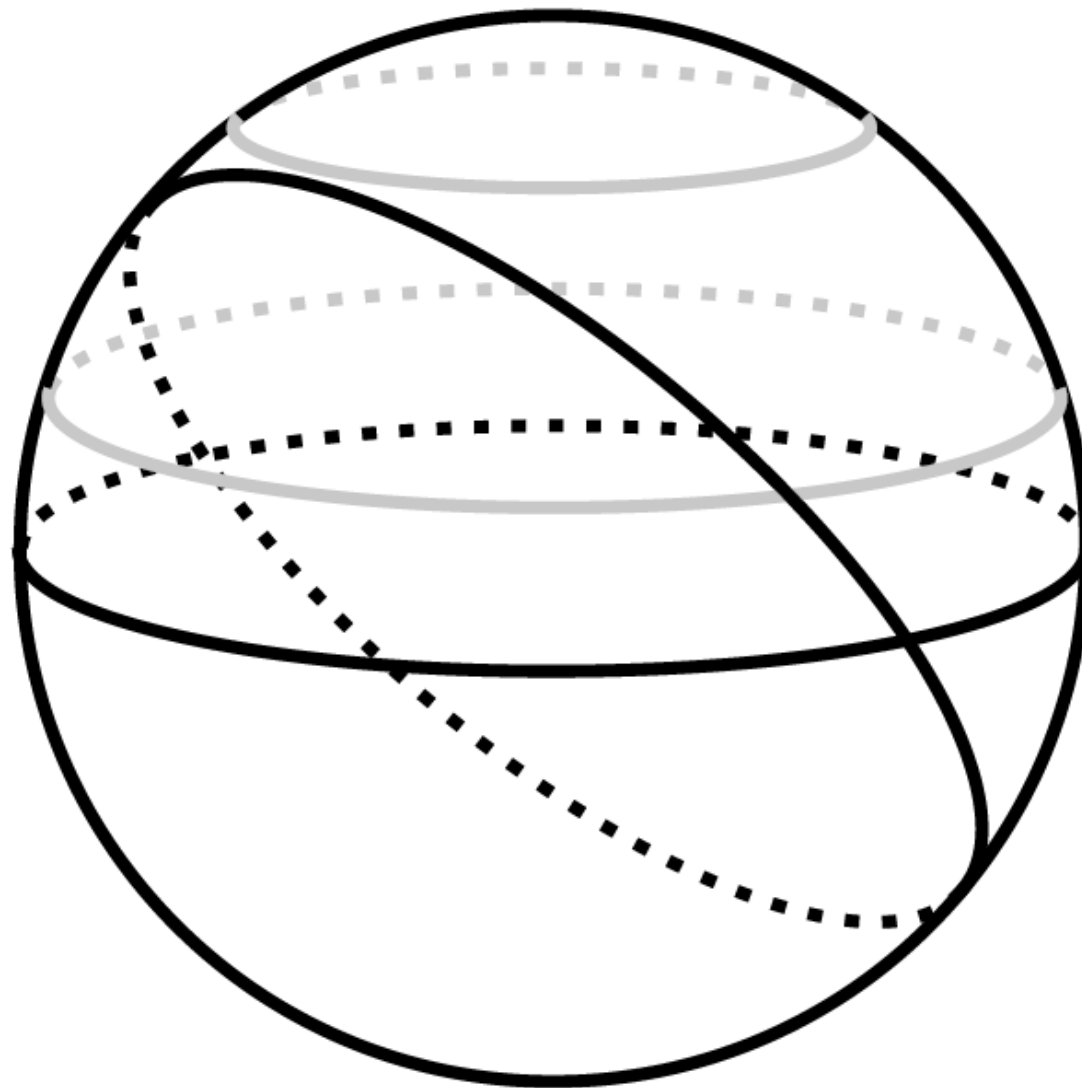
Jedna gwiazda znajduje się na SW na wysokości $h_1 = 52^\circ$, a druga na WNW na wysokości $h_2 = 22^\circ$. Jaka jest odległość katowa między nimi?

(matura z 13 lutego 1911 r.)



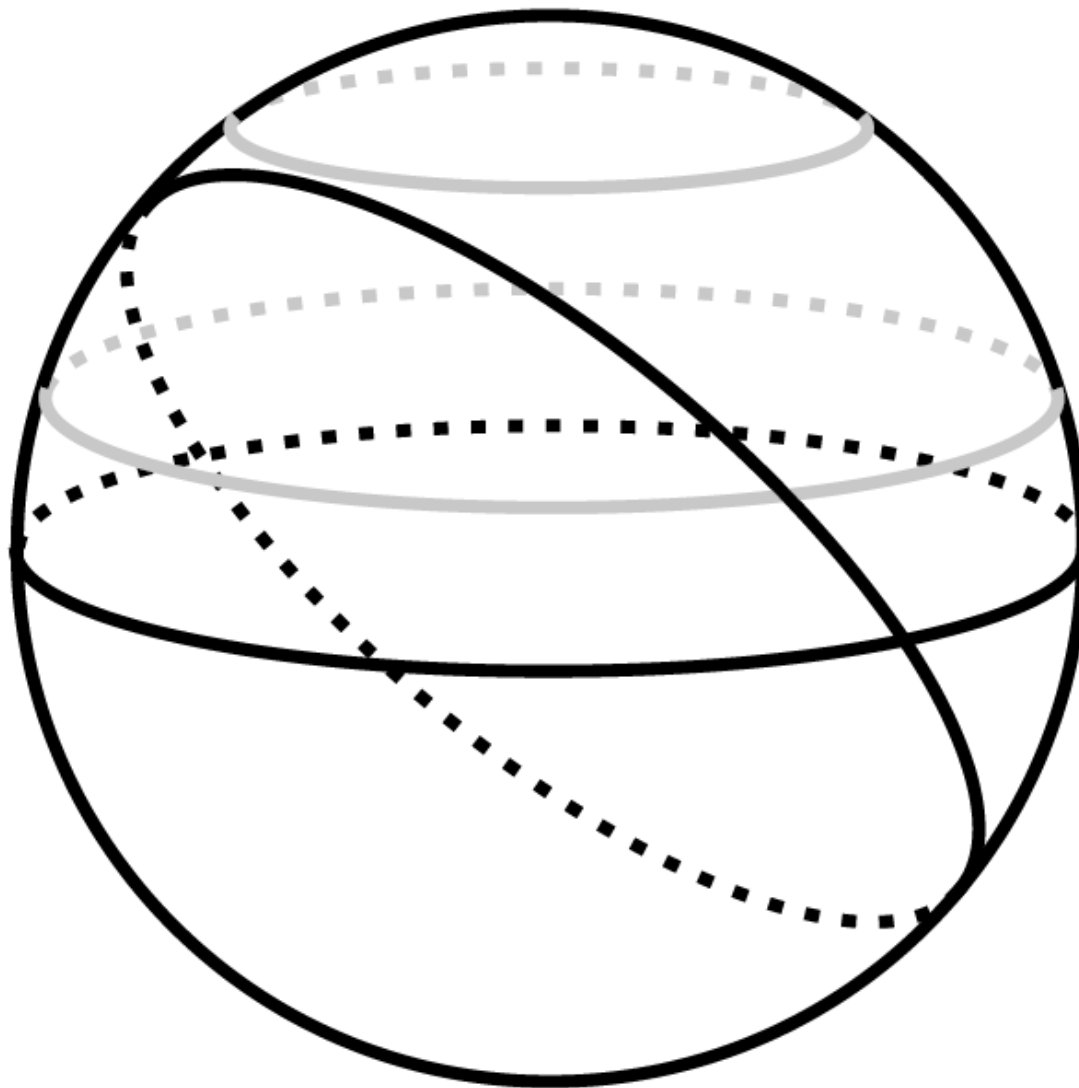
Geometria sferyczna

Geometria sferyczna



Geometria sferyczna

- **Okrąg wielki** - okrąg na sferze, którego środek pokrywa się ze środkiem sfery,

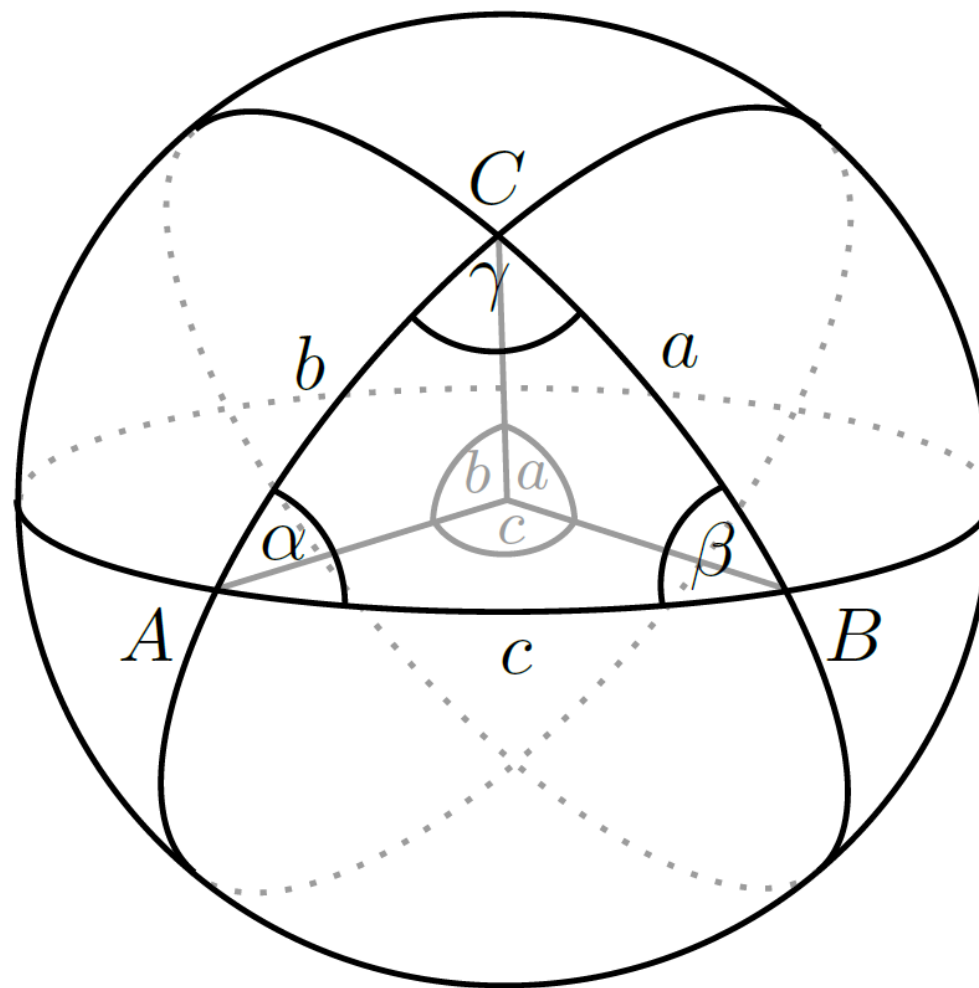


Geometria sferyczna

- **Okrąg wielki** - okrąg na sferze, którego środek pokrywa się ze środkiem sfery,

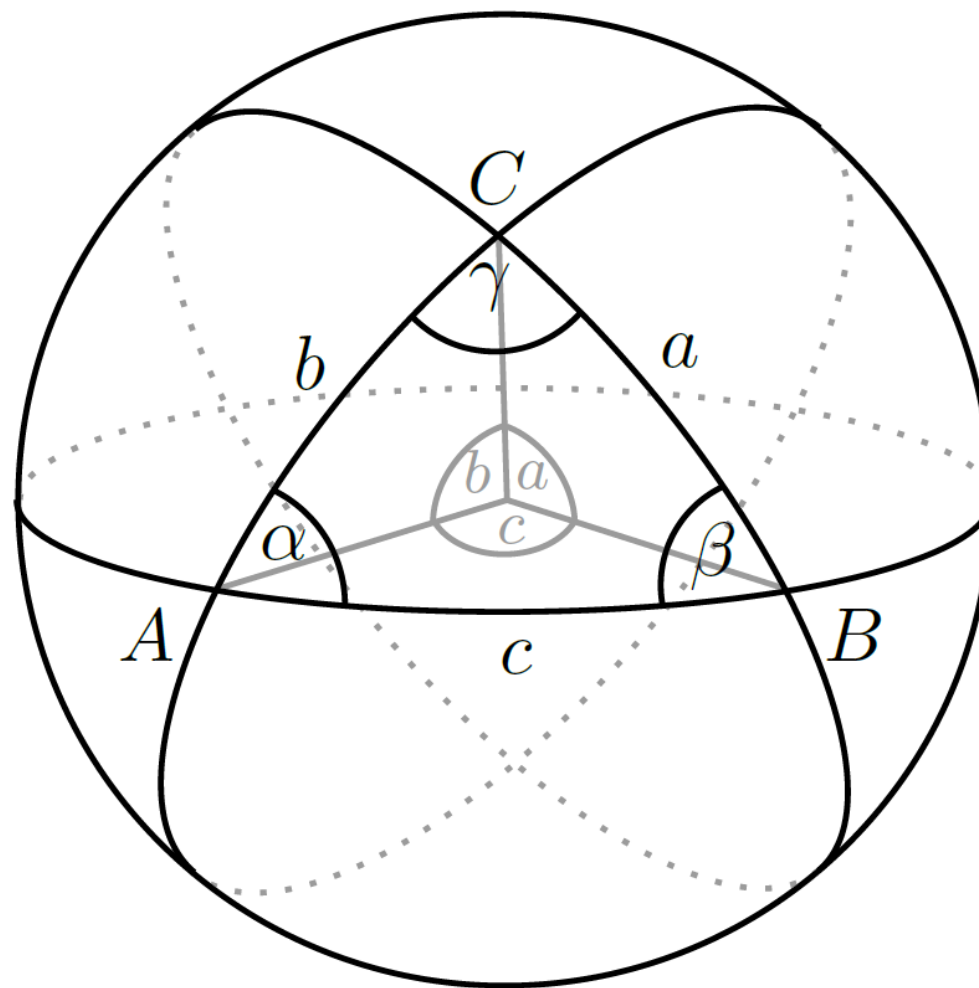
Geometria sferyczna

- **Okrąg wielki** - okrąg na sferze, którego środek pokrywa się ze środkiem sfery,
- **Trójkąt sferyczny** - fragment sfery ograniczony przez trzy łuki okręgów wielkich.



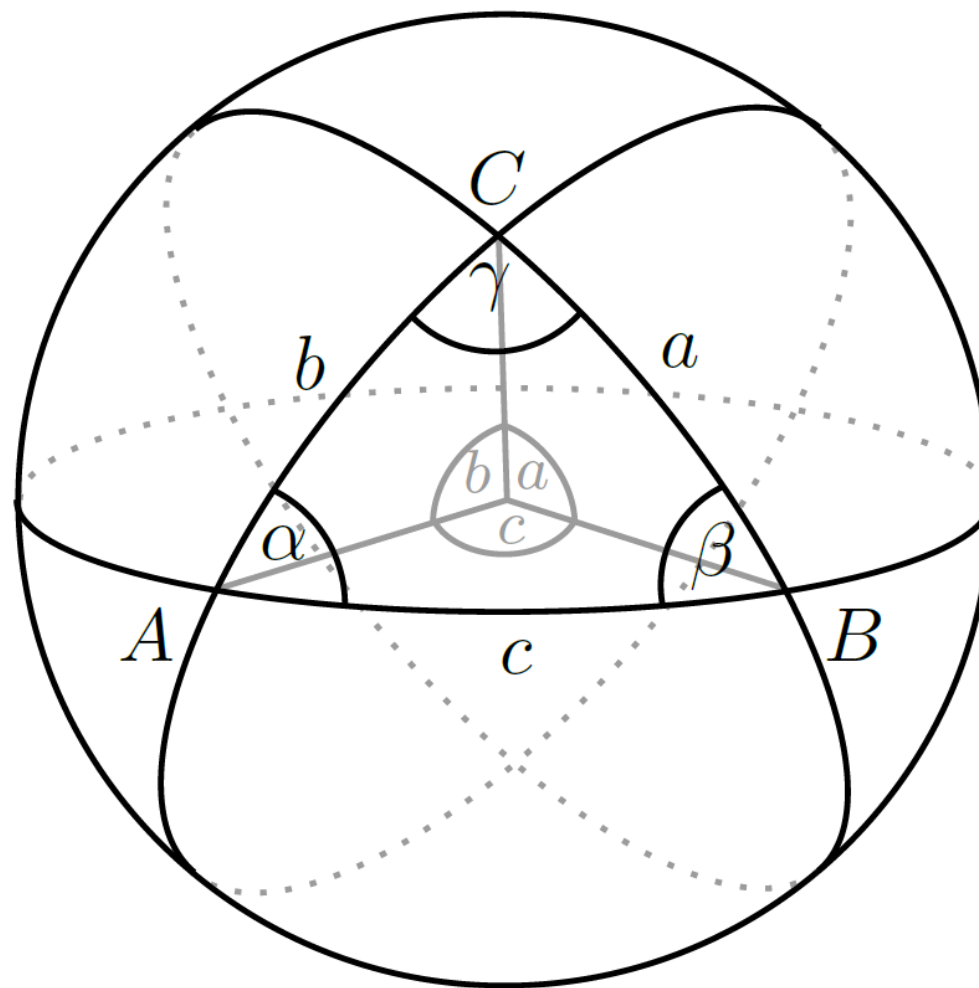
Geometria sferyczna

- **Okrąg wielki** - okrąg na sferze, którego środek pokrywa się ze środkiem sfery,
- **Trójkąt sferyczny** - fragment sfery ograniczony przez trzy łuki okręgów wielkich.
- **Kąt między okręgami wielkimi** - kąt pomiędzy stycznymi do tych okręgów w punkcie przecięcia (α, β, γ).
($\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$)



Geometria sferyczna

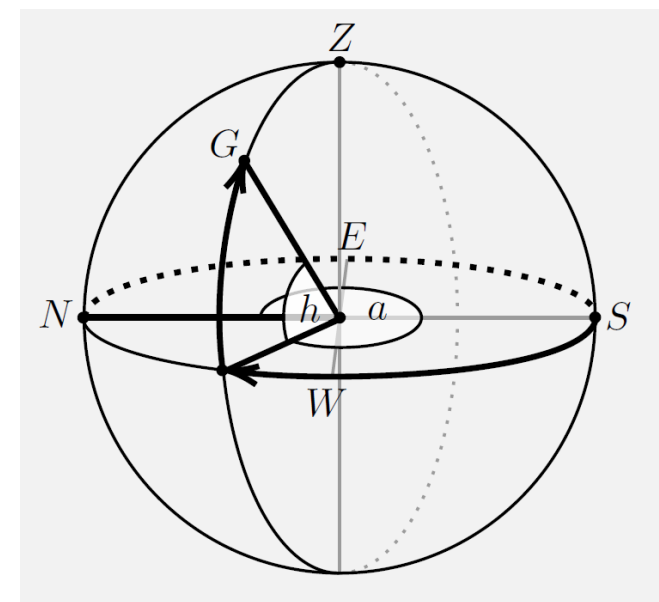
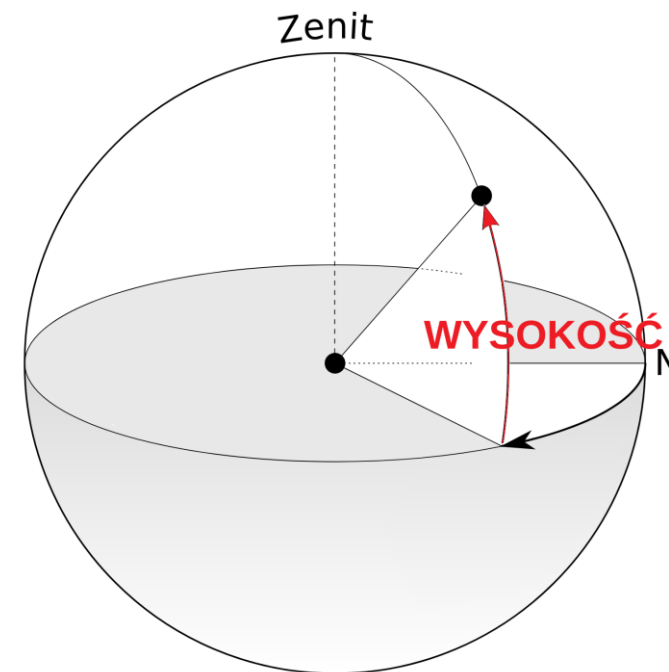
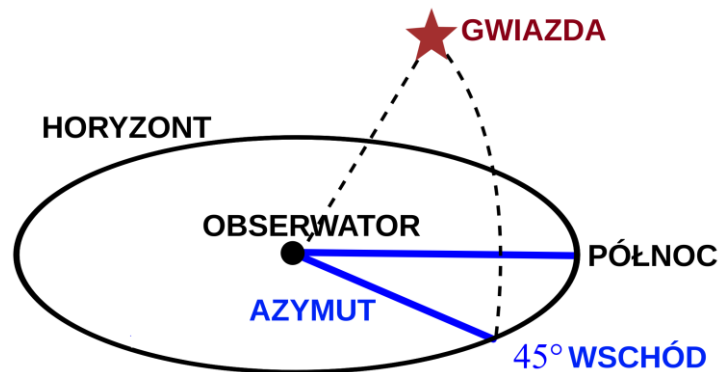
- **Okrąg wielki** - okrąg na sferze, którego środek pokrywa się ze środkiem sfery,
- **Trójkąt sferyczny** - fragment sfery ograniczony przez trzy łuki okręgów wielkich.
- **Kąt między okręgami wielkimi** - kąt pomiędzy stycznymi do tych okręgów w punkcie przecięcia (α , β , γ).
($\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$)
- **Odległość sferyczna** między punktami - miara kąta środkowego, na którym oparty jest łuk okręgu wielkiego przechodzącego przez te punkty (a , b , c).



Astronomia

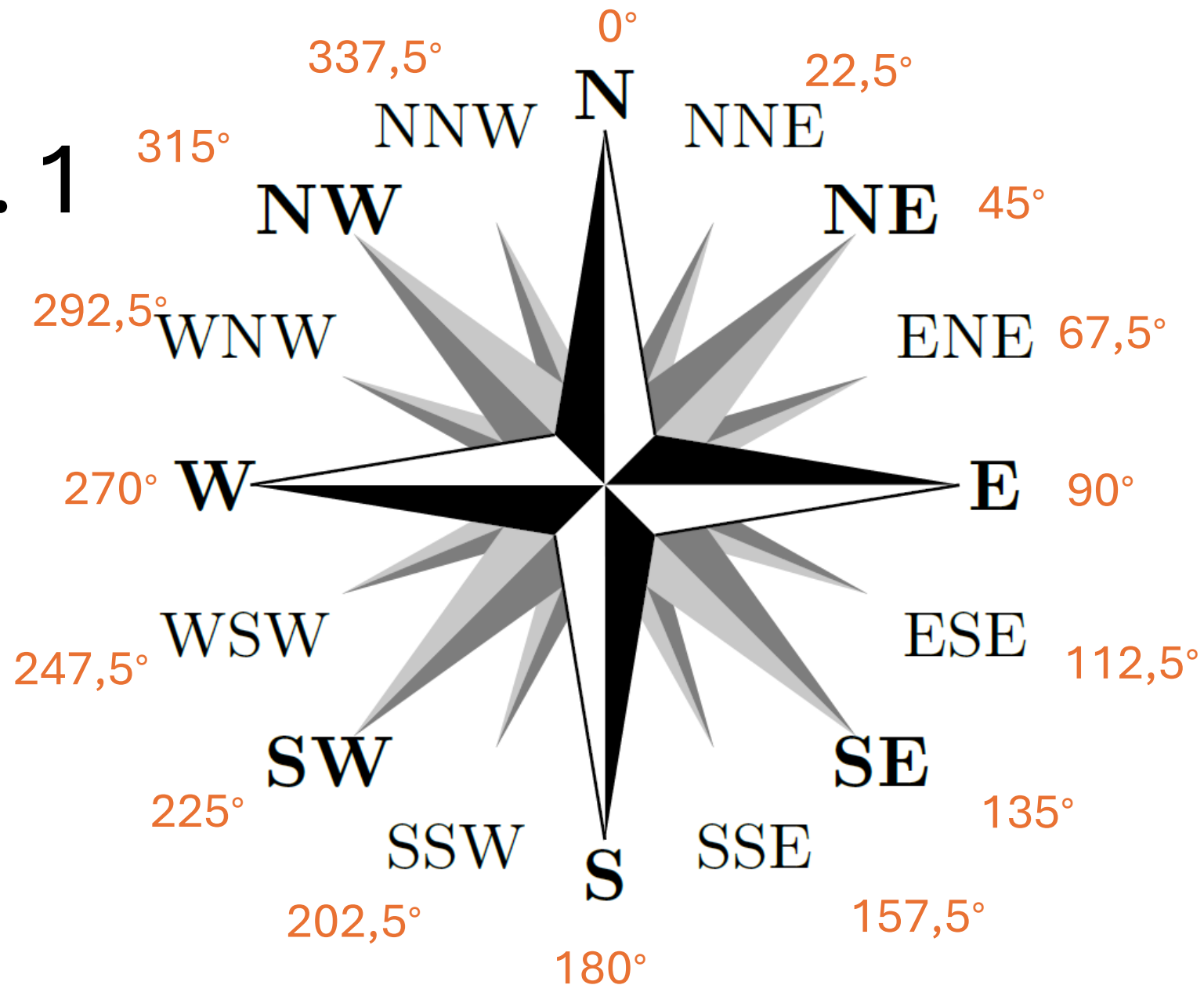


- Sfera niebieska
- Zenit
- Azymut (a)
- Wysokość (h)



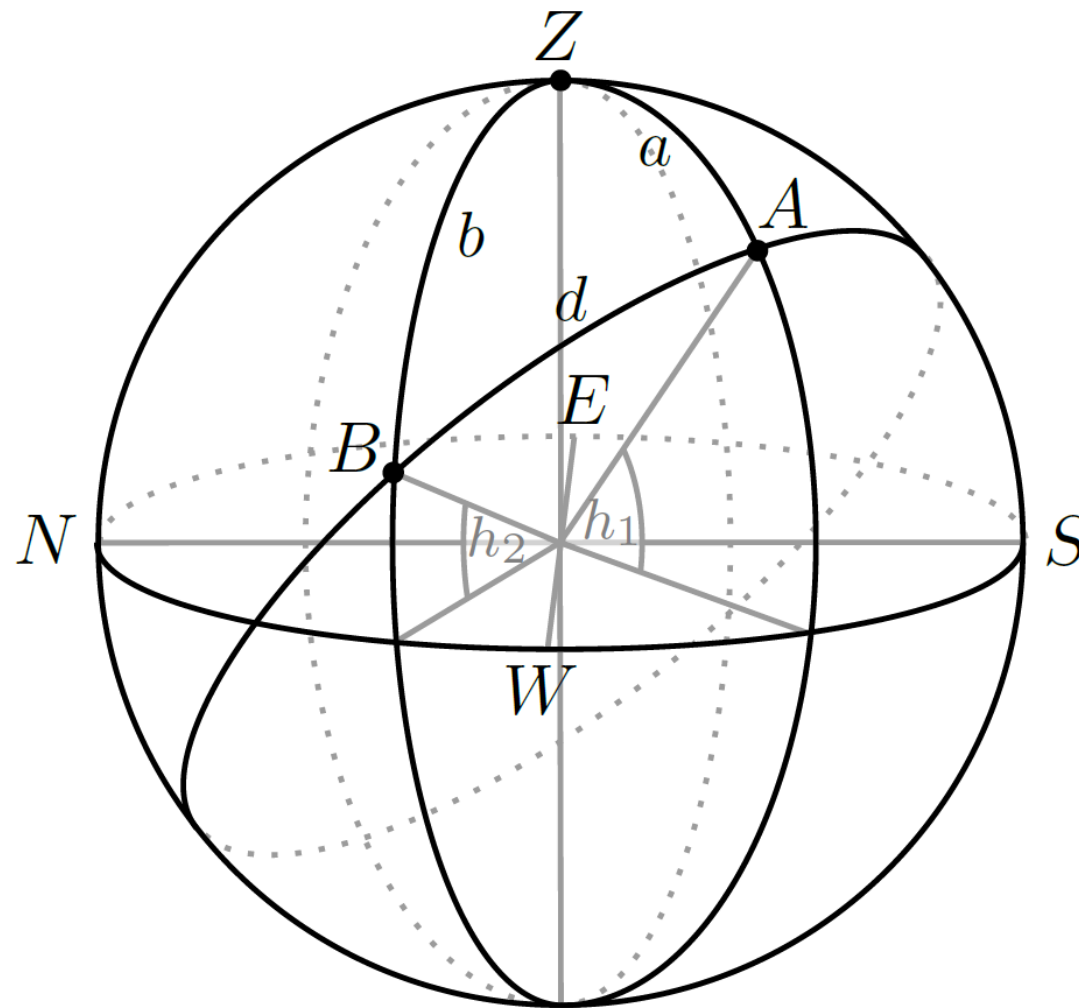
Rozwiązanie, cz. 1

- Skoro pierwsza gwiazda leży na SW, to jej azymut wynosi 225° .
- Podobnie, azymut drugiej gwiazdy (WNW) to $292,5^\circ$.



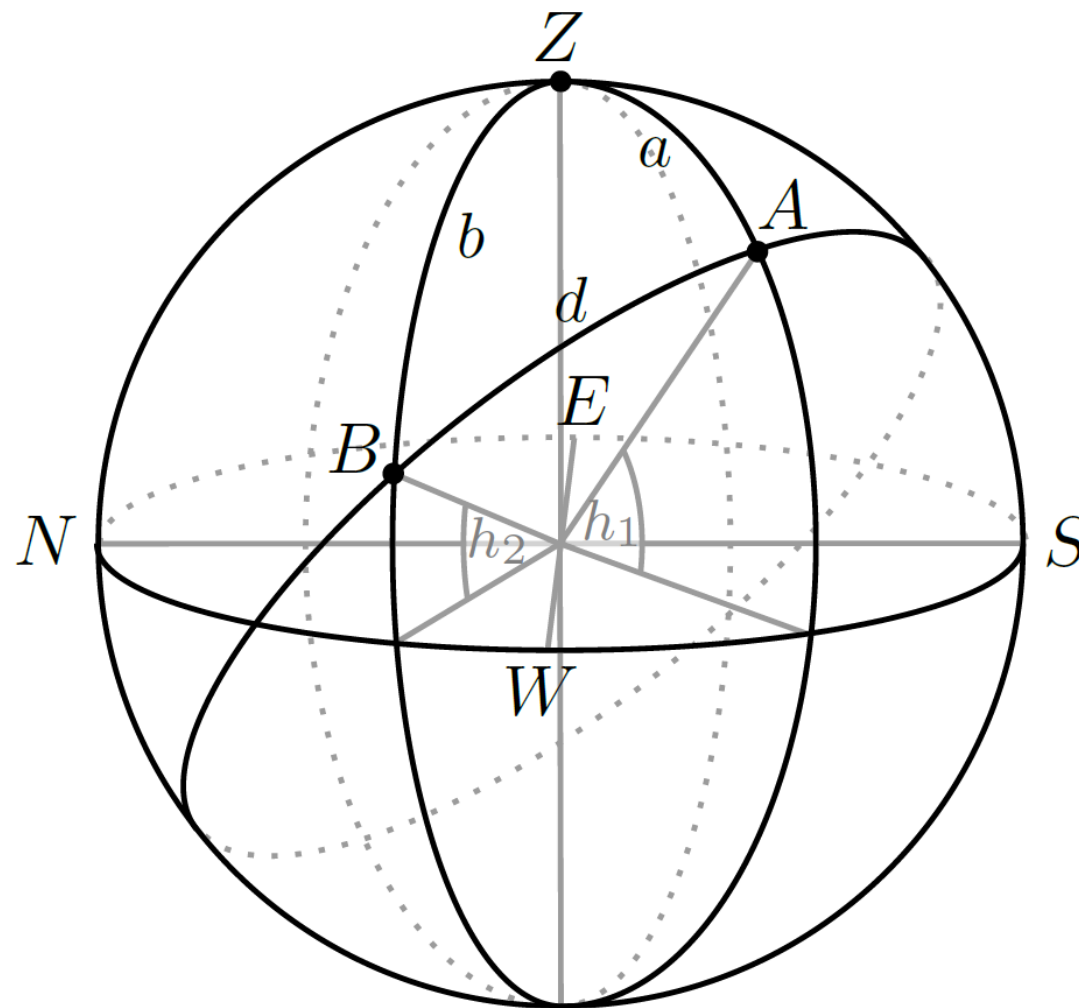
Rozwiązanie, cz. 2

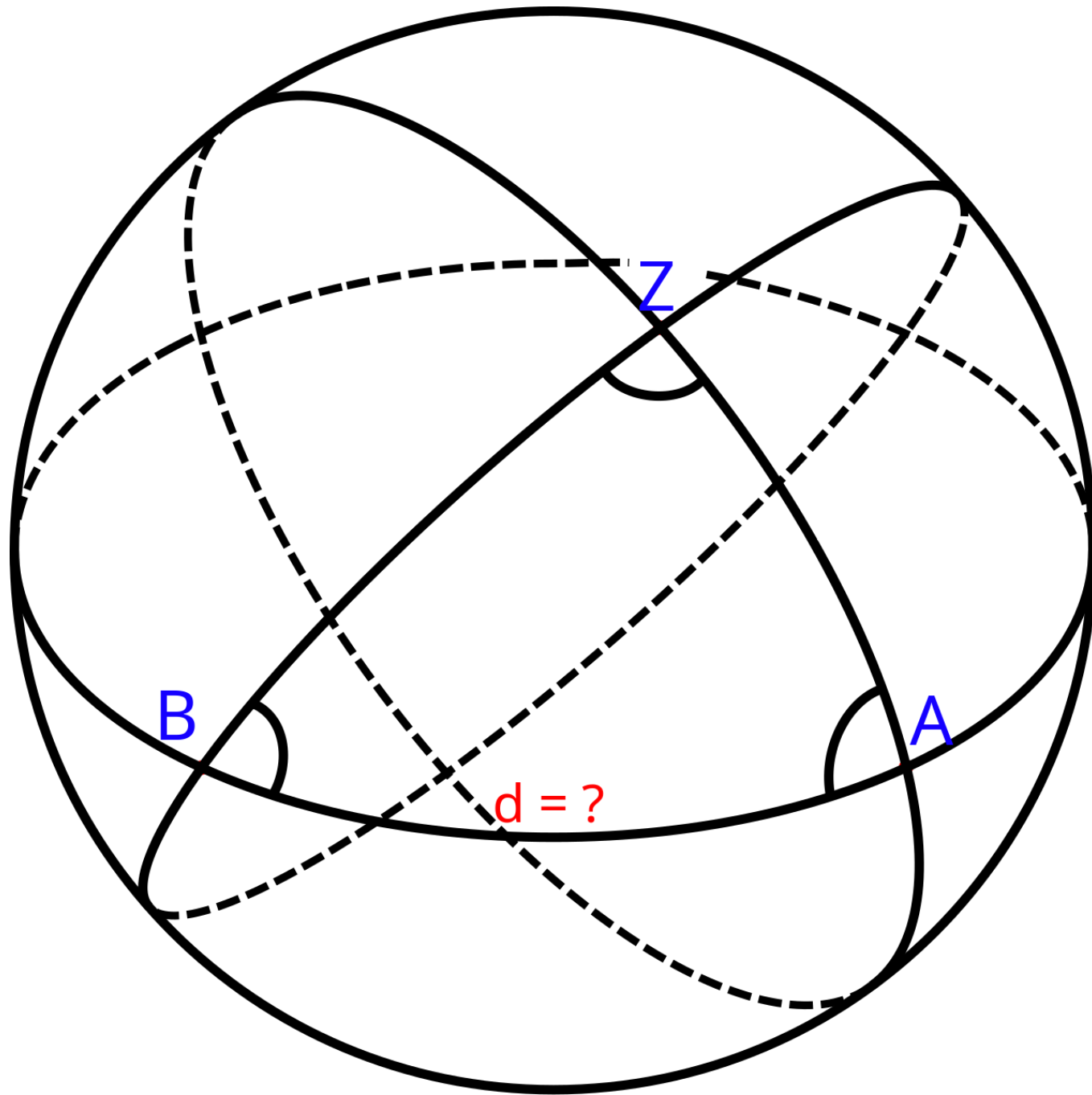
- Skoro pierwsza gwiazda leży na SW, to jej azymut wynosi 225° .
- Podobnie, azymut drugiej gwiazdy (WNW) to $292,5^\circ$.
- Zatem $\sphericalangle AZB = 292,5^\circ - 225^\circ = 67,5^\circ$



Rozwiązanie, cz. 3

- Dla dowolnego punktu suma odległości od zenitu i wysokość sumują się do 90° .
- Stąd:
 $a = 90^\circ - h_1 = 90^\circ - 52^\circ = 38^\circ$
 $b = 90^\circ - h_2 = 90^\circ - 22^\circ = 68^\circ$



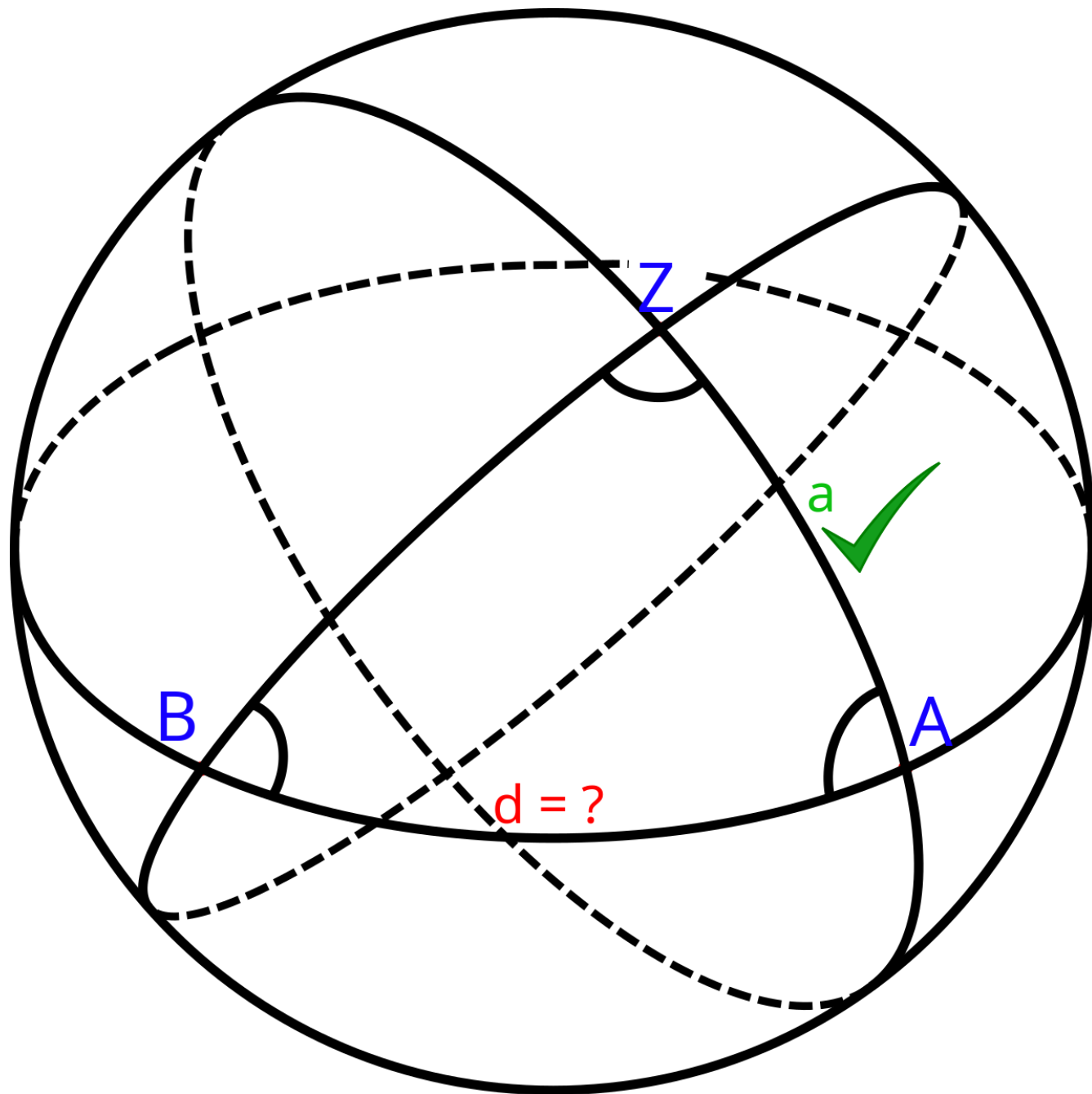


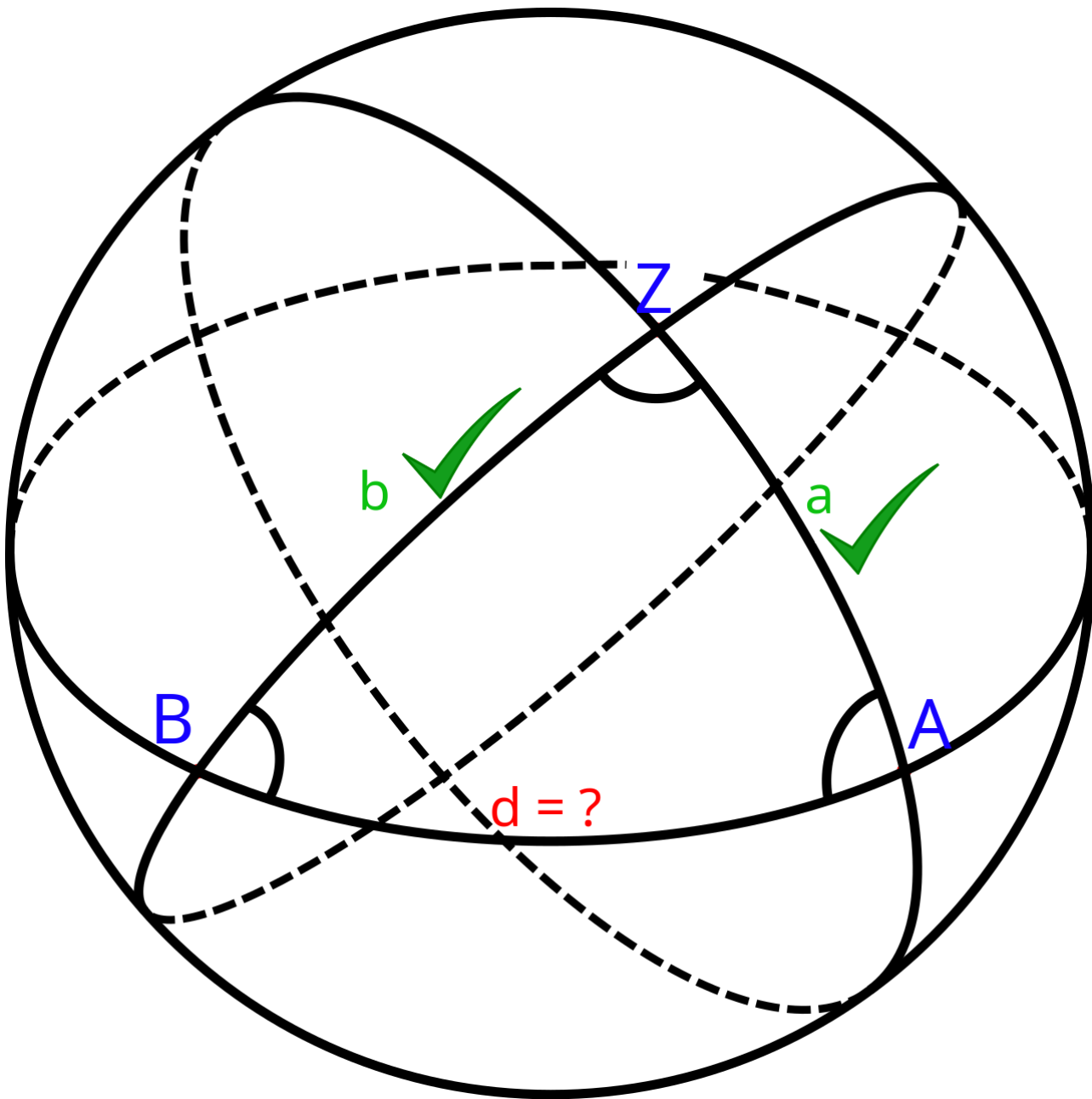
Z

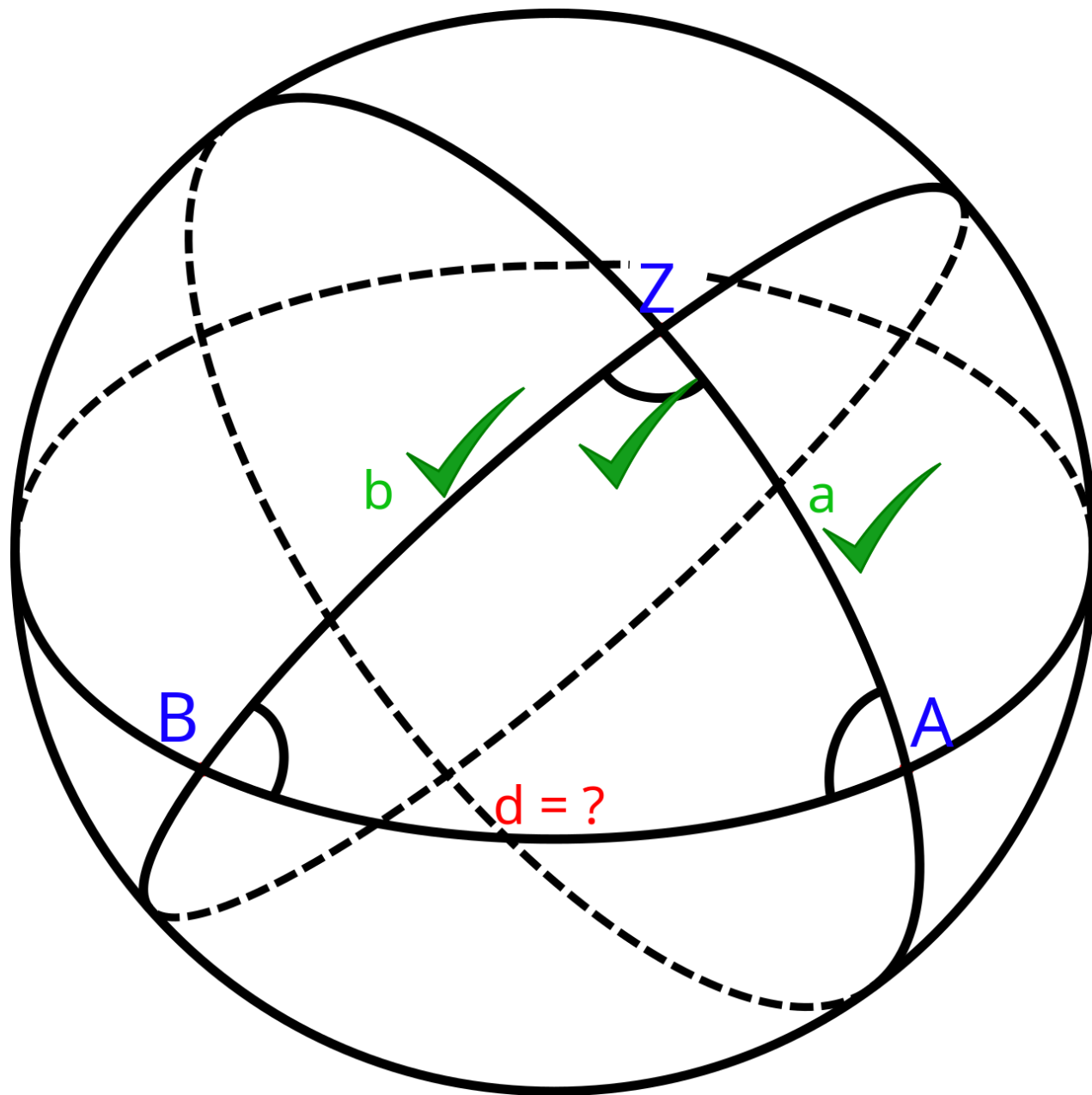
B

A

d = ?



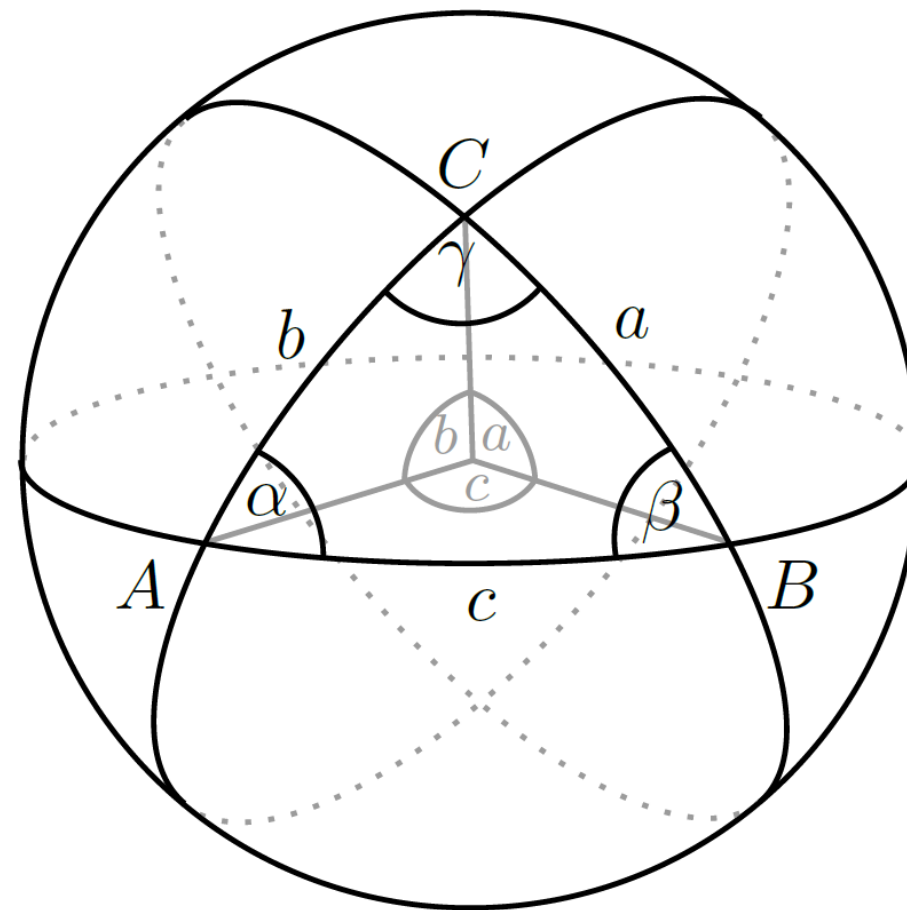




Twierdzenie cosinusów

I Twierdzenie cosinusów:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma$$



Rozwiązanie, cz. 4

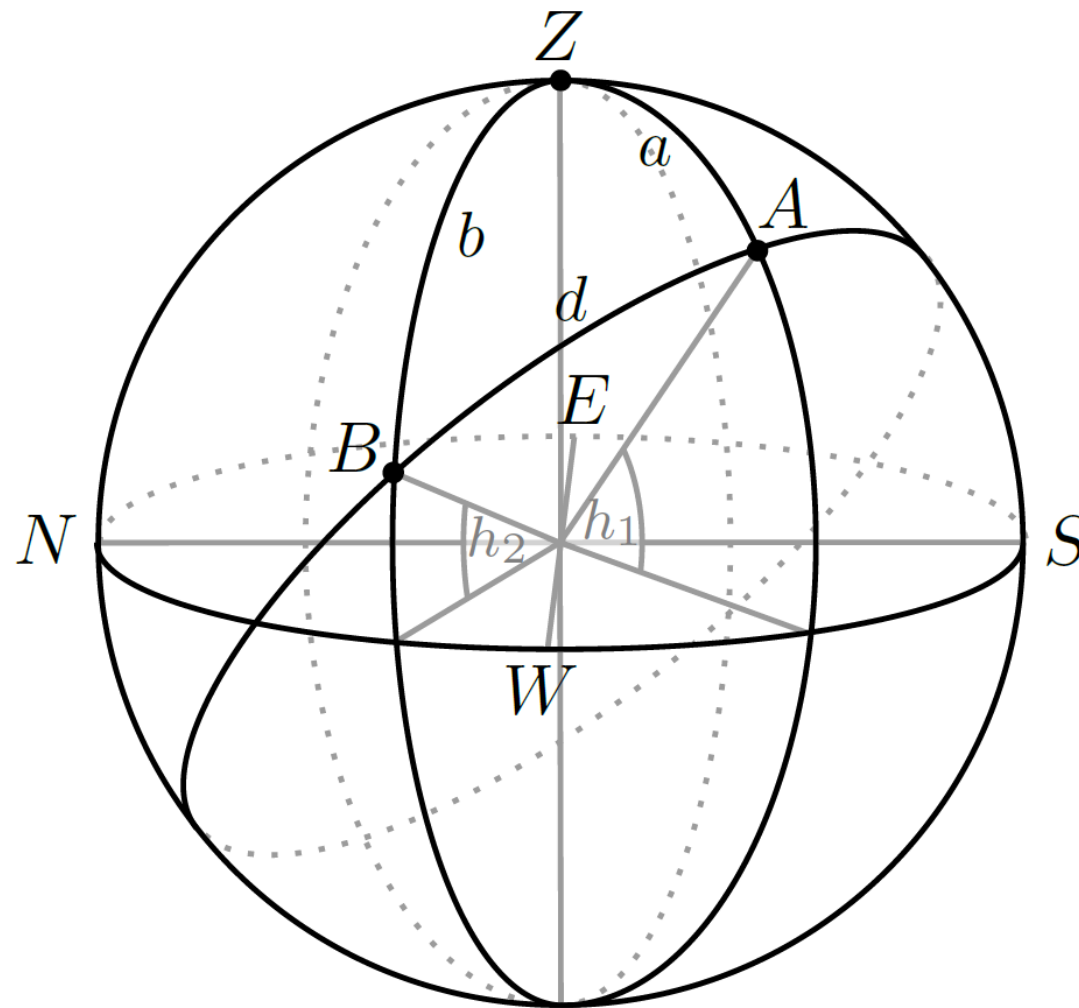
Z twierdzenia cosinusów:

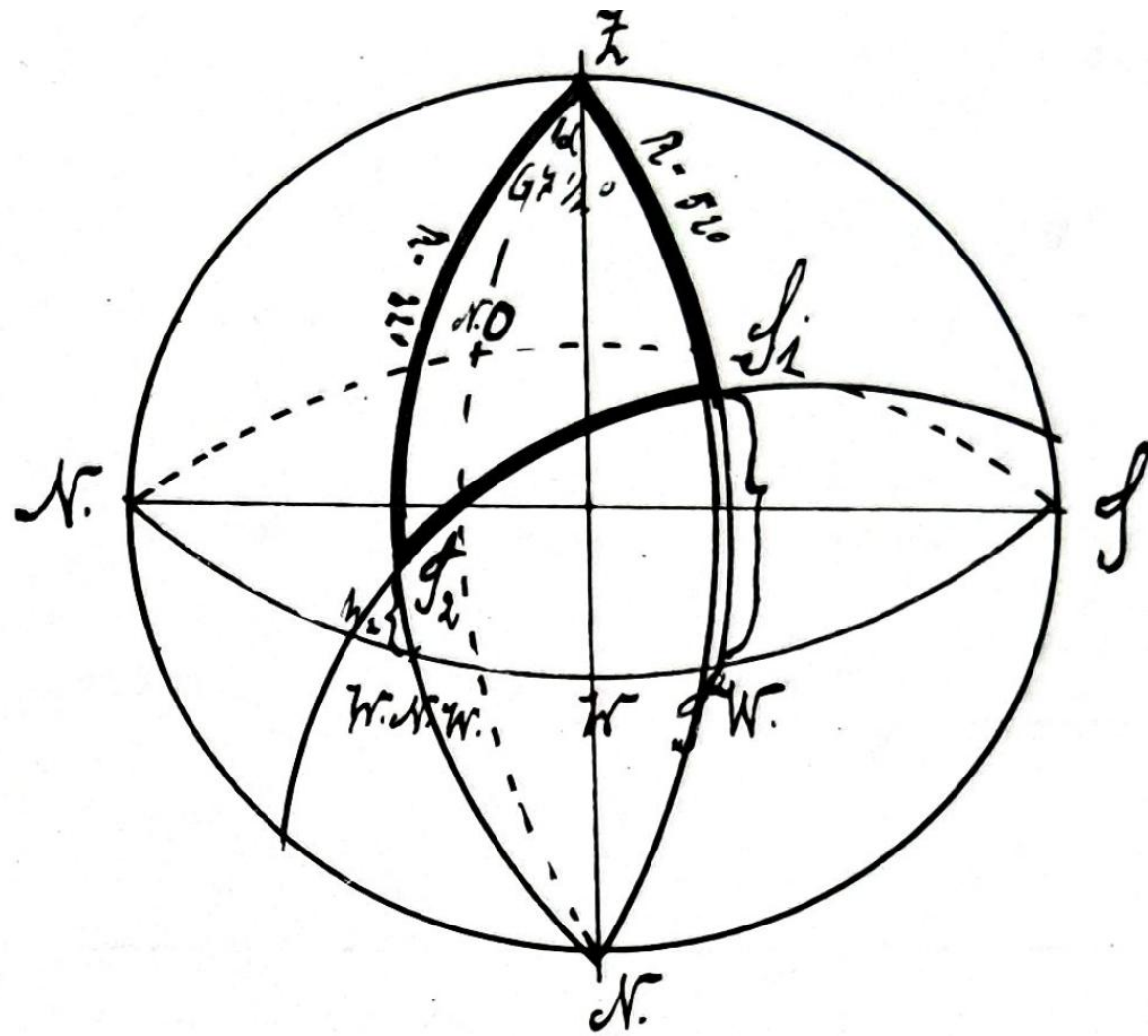
$$\cos d = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \sphericalangle BZA$$

$$\cos d = \cos 38^\circ \cdot \cos 68^\circ + \sin 38^\circ \cdot \sin 68^\circ \cdot \cos 67,5^\circ \approx 0,51$$

Zatem:

$$d \approx 59^\circ.$$





$\begin{array}{r} \log \cos 38^\circ = 9,89653 - i0 \\ + \log \cos 68^\circ = 9,57358 - i0 \\ \hline \text{or } 0,47011 - i \\ \quad \underline{997} \\ \quad 14 \end{array}$	$\begin{array}{r} \log \sin 38^\circ = 9,78934 - i0 \\ + \log \sin 68^\circ = 9,96717 - i0 \\ + \log \cos 67^\circ 30' = 9,58284 - i0 \end{array}$
---	--

Bardzo często uczeń miał uzyskać odpowiedź dla dowolnych zmiennych, zaś potem obliczyć odpowiedź dla konkretnych danych – korzystając z tablic logarytmicznych.

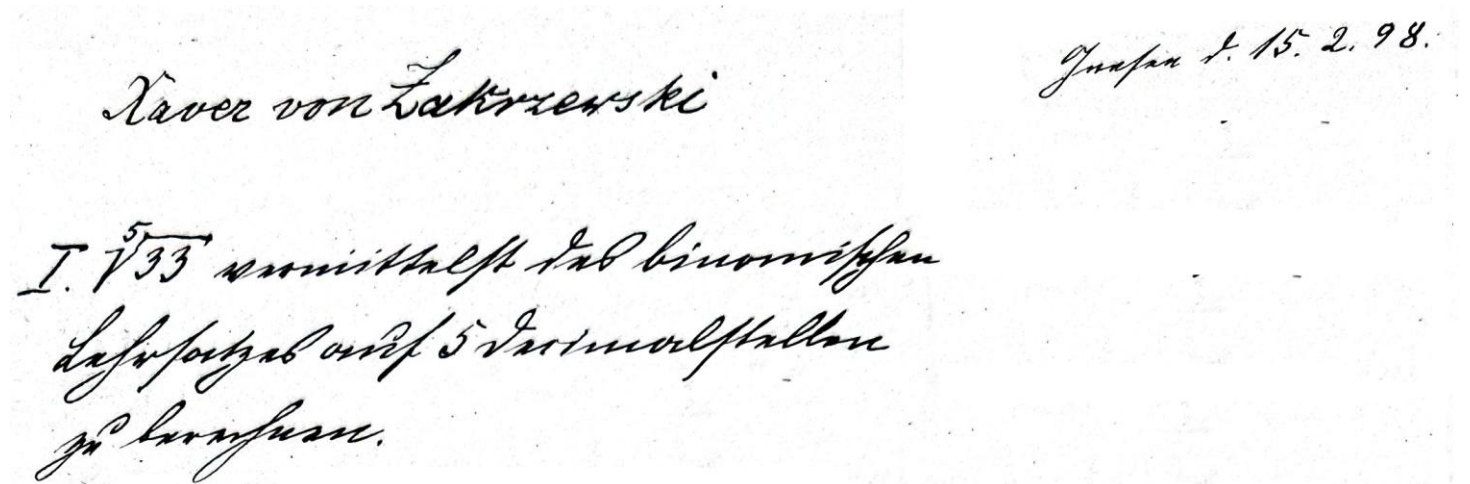
Przybliżenie pierwiastka

Zadanie: Korzystając z
twierdzenia o dwumianie,
obliczyć liczbę

$$\sqrt[5]{33}$$

z dokładnością do 5
miejsc po przecinku.

(matura z lutego 1898 r.)



Przybliżenie pierwiastka

Rozwiązanie:

$$\sqrt[5]{33} = (2^5 + 1)^{\frac{1}{5}}$$

$$= 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$= 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/5}{k} \frac{1}{32^k}$$

$$\approx 2,01235$$

I.

$$\sqrt[5]{33} = \sqrt[5]{32+1} = \sqrt[5]{32\left(1+\frac{1}{32}\right)} = 2\left(1+\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$$
$$\left(1+\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}} = 1 + \binom{1/5}{1}\left(\frac{1}{32}\right) + \binom{1/5}{2}\left(\frac{1}{32}\right)^2 + \binom{1/5}{3}\left(\frac{1}{32}\right)^3 \dots$$
$$= 1 + \frac{1}{160} - \frac{2 \cdot 1}{25 \cdot 1024} + \frac{3}{125 \cdot 32768}$$

$$\binom{1/5}{2} = \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)}{1 \cdot 2} = \frac{\frac{1}{5} \cdot (-\frac{4}{5})}{2} = -\frac{2}{25} = -0,08$$

$$\binom{1/5}{3} = \frac{-\frac{2}{25}(\frac{1}{5}-1)}{\cancel{1} \cdot 2 \cdot 3} = \frac{(-\frac{2}{25}) \cdot (-\frac{4}{5})}{\cancel{2} \cdot 3} = +\frac{6}{125} = +0,048$$

Konstrukcja trójkąta

Dany jest kąt o mierze γ . Skonstruuj trójkąt $\triangle ABC$, spełniający następujące warunki:

- $\sphericalangle ACB = \gamma$,
- dwusieczna kąta ACB dzieli bok AB w stosunku 3 : 5,
- suma długości wysokości opuszczonej z wierzchołka A oraz długości środkowej opuszczonej z wierzchołka B wynosi 5.

(matura z 1 lutego 1900 r.)

2. Zuer Punktstruktura eines Dreiecks
wobei sein gegebenes $s = h_a + m_b$;
 γ ; $u : v = 5 : 3$

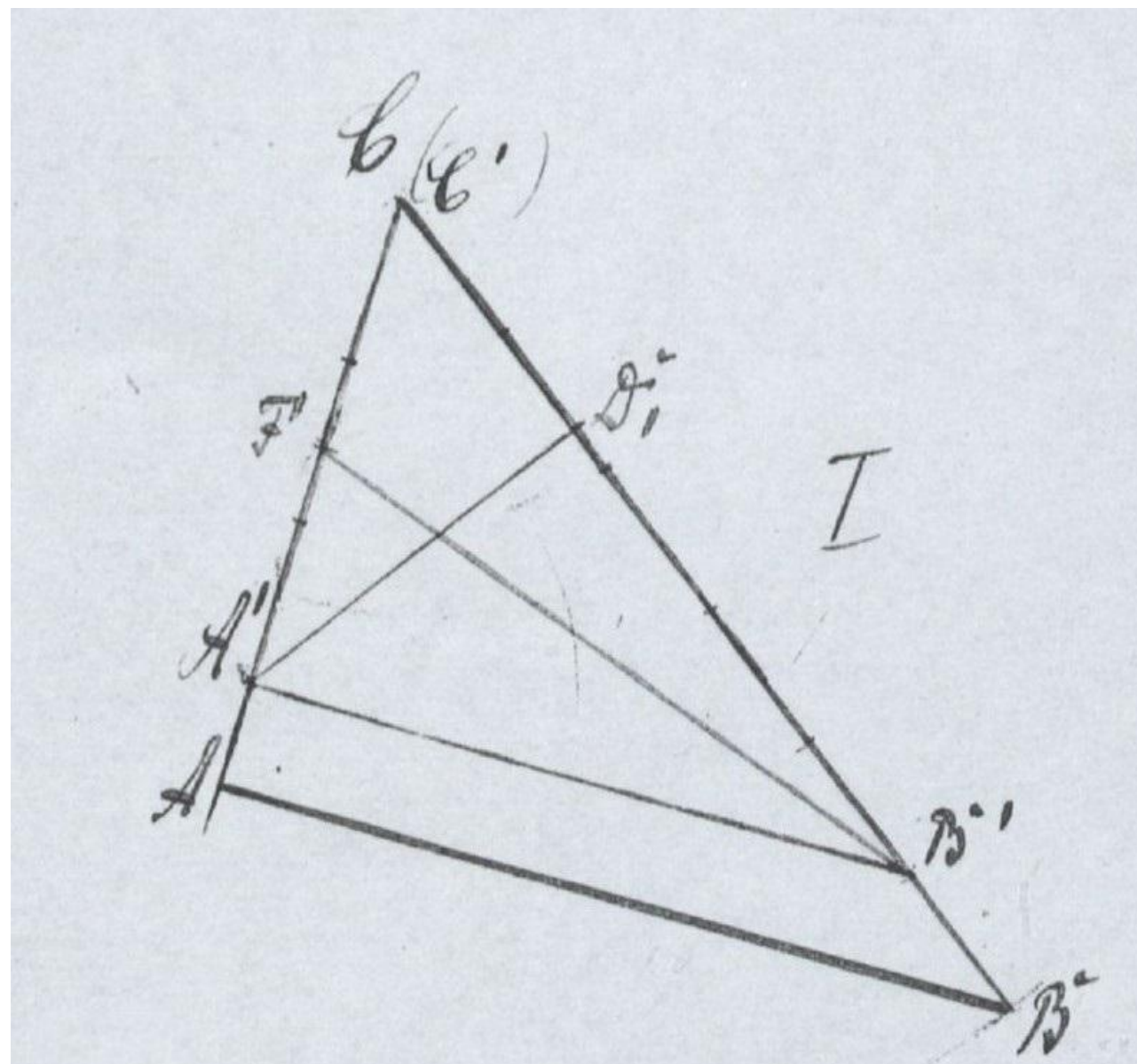
Charakteristika:

u und v sind Abschnitte der Mittellinie.

$$u : v = a : b$$

$$u : v = 5 : 3 \text{ folgt.}$$

$$a : b = 5 : 3$$



Analyse:

u und v sind Abschnitte der Mittellinie.

$$u : v = a : b$$

$$u : v = 5 : 3 \quad \text{folgt.}$$

$$a : b = 5 : 3$$

Mit dieser Proportion ist zur Konstruktion des Dreiecks

g; $a : b$ n. 5 gegeben. *Da*
auch die Bestimmung $a : b = 5 : 3$ aus
g ist die Gestalt des gesuchten
Dreiecks bestimmt. Wir können
also mit dem gesuchten Dreieck
ähnliches konstruieren.

Zu diesem Zweck sind alle Punkte
bekannt, also n. h_a n. m_b n. a
Zu ähnlichem Dreieck auszufertigen

$$h_a' : m_b' : a' = h_a : m_b : a$$

$$(h_a' + m_b') : a' = (h_a + m_b) : a$$

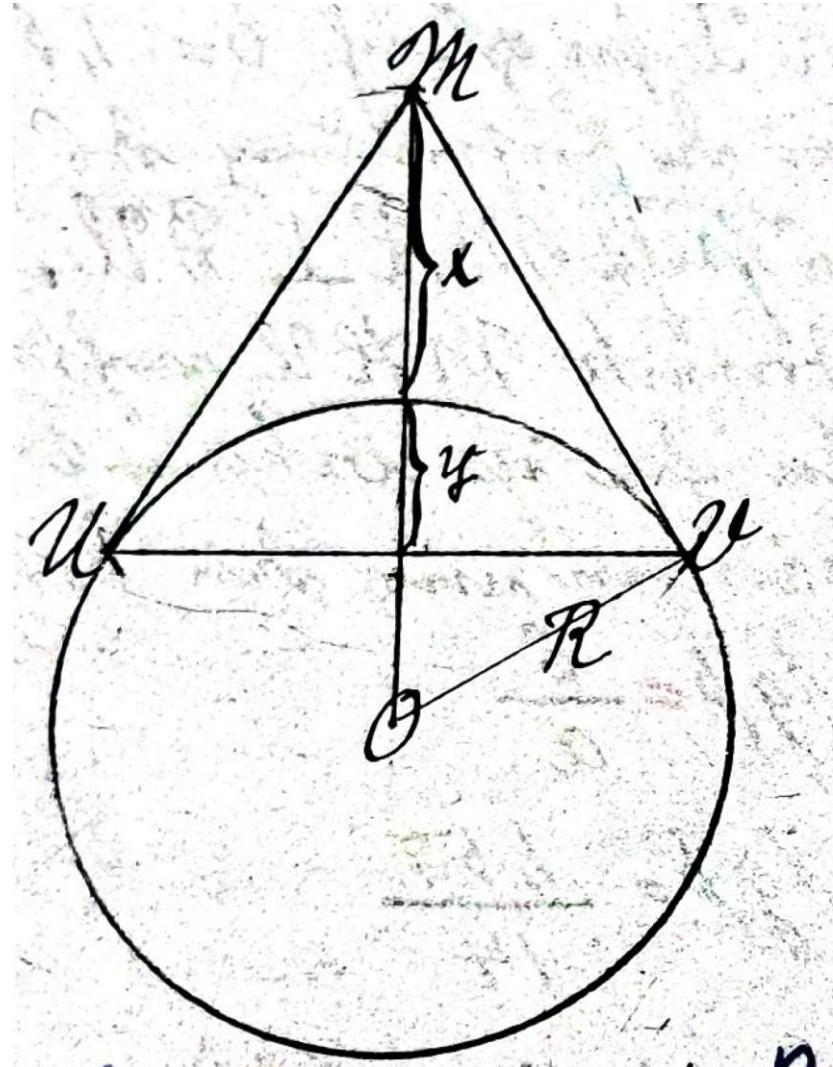
$$s' : a' = s : a$$

Also ist a neue Proportionale
zu den ~~neu~~ bekannten Größen s', a', s .

Świecący punkt

Jak daleko musi znajdować się świecący punkt od kuli, aby oświetlona część stanowiła $\frac{1}{4}$ jej powierzchni?

(matura z 1899 r.)

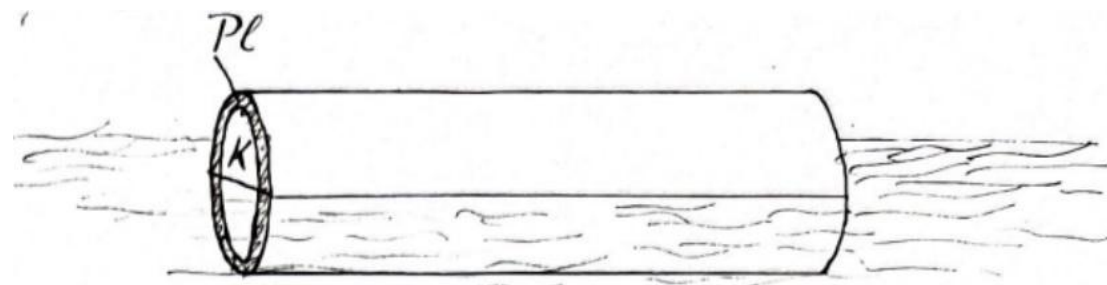


Cylinder

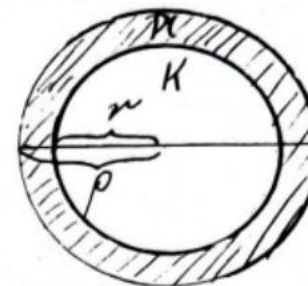
Cylinder korkowy ($s = 0,25$) o średnicy 20cm, otoczony jest cylindrowym płaszczem łożnianym ($s' = 11,38$). Jak gruba musi być łożniana powłoka, aby ciało leżące na boku zanurzyło się do połowy w wodzie?

(matura z marca 1916 r.)

II. Ein Korkzylinder ($s = 0,25$) von 20 cm Durchmesser wird von einem zylindrischen Bleimantel ($s' = 11,38$) umgeben. Wie dick muß dieser Bleimantel gemacht werden, damit der Körper auf der Seite liegend bis zur Hälfte in Wasser sinkt?



Querschnitt:



$$s = 0,25$$

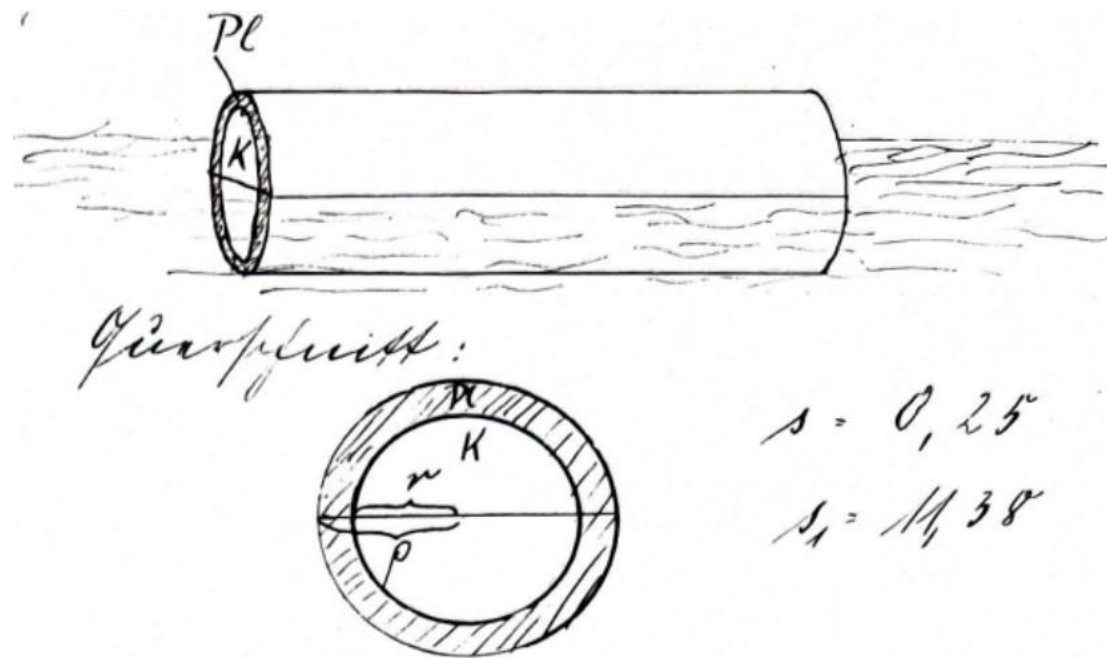
$$s_1 = 11,38$$

Cylinder

Cylinder korkowy ($s = 0,25$) o średnicy 20cm, otoczony jest cylindrowym płaszczem ołowianym ($s' = 11,38$). Jak gruba musi być ołowiana powłoka, aby ciało leżące na boku zanurzyło się do połowy w wodzie?

(matura z marca 1916 r.)

II. Ein Korkzylinder ($s = 0,25$) von 20 cm Durchmesser wird von einem zylindrischen Bleimantel ($s' = 11,38$) umgeben. Wie dick muß dieser Bleimantel gemacht werden, damit der Körper auf der Seite liegend bis zur Hälfte in Wasser einsinkt?

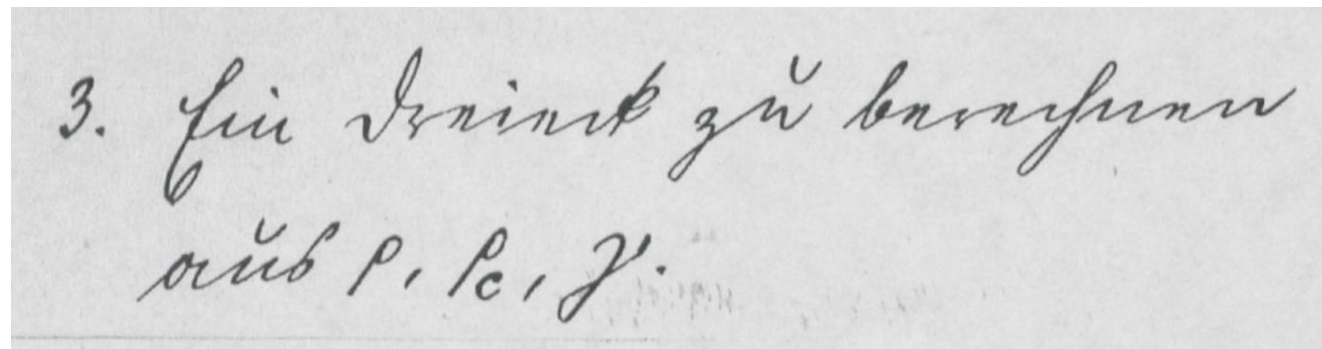


Rozwiązywanie trójkąta

Rozwiąż trójkąt mając dane:

$$\rho, \rho_c, \gamma.$$

(matura z lutego 1908 r.)



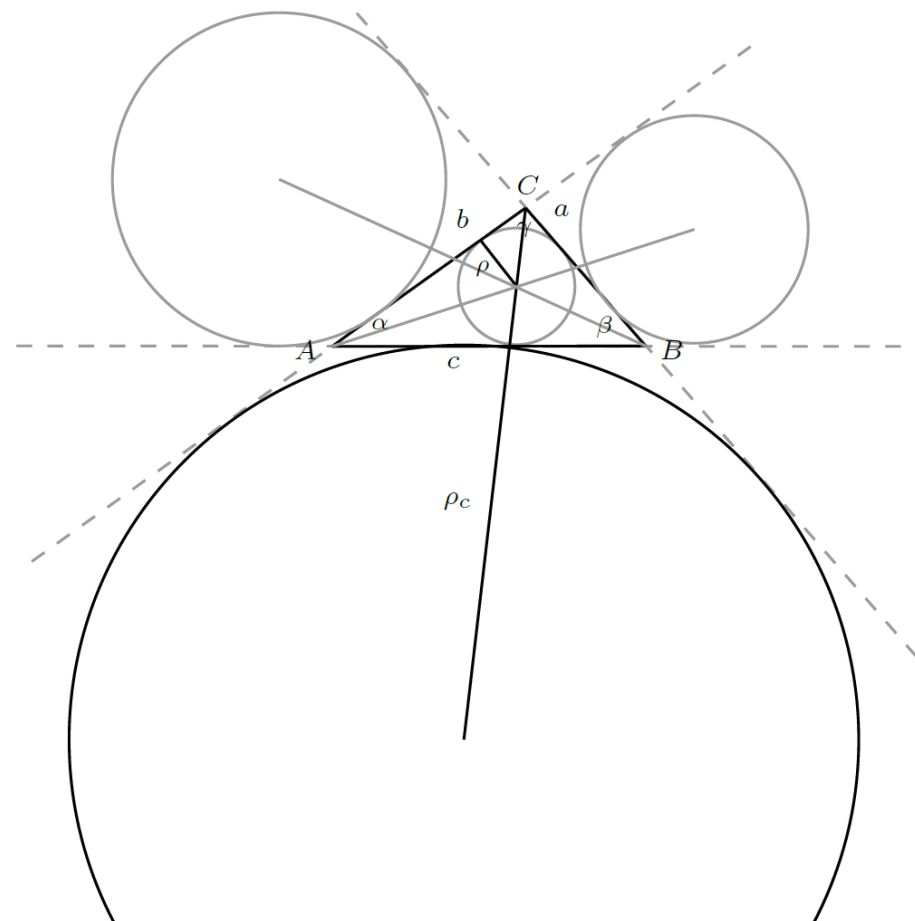
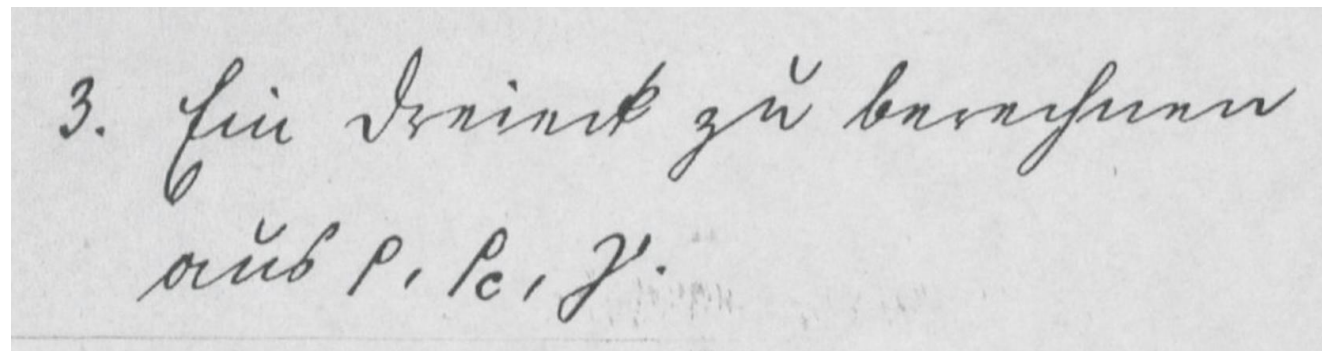
Rozwiązywanie trójkąta

Rozwiąż trójkąt mając dane:

$$\rho, \rho_c, \gamma.$$

(matura z lutego 1908 r.)

(ρ oznacza promień okręgu wpisanego, ρ_c to promień okręgu dopisanego do boku naprzeciwko kąta γ)



Rozwiązywanie trójkąta

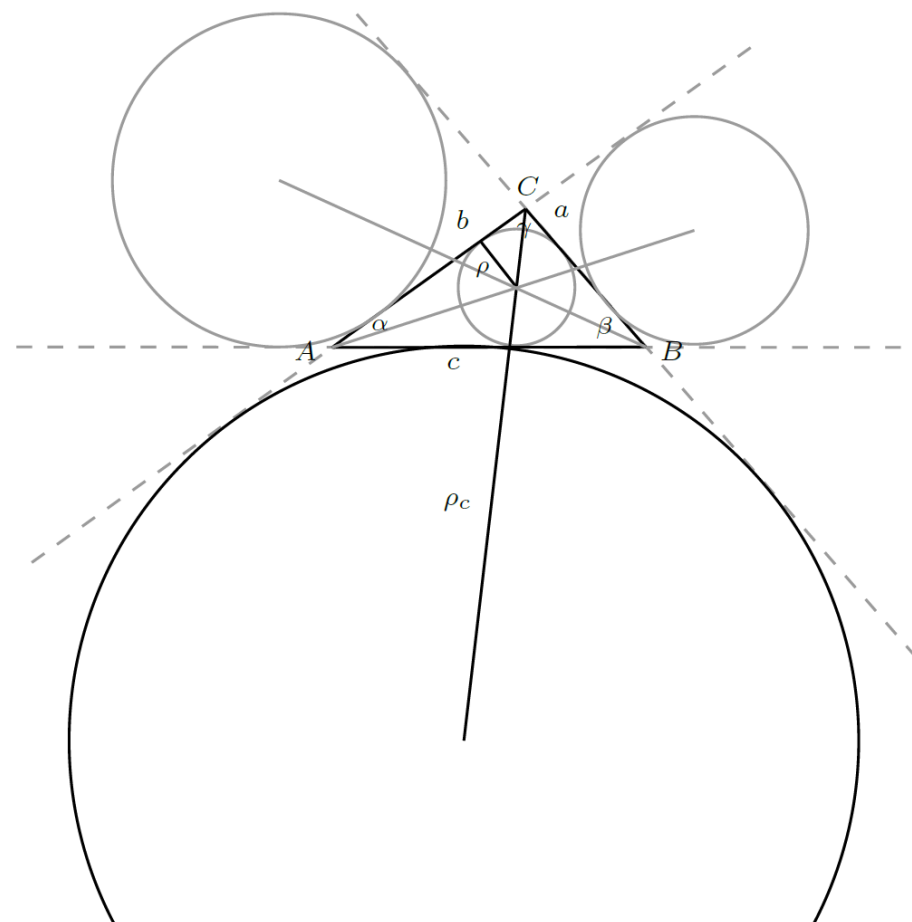
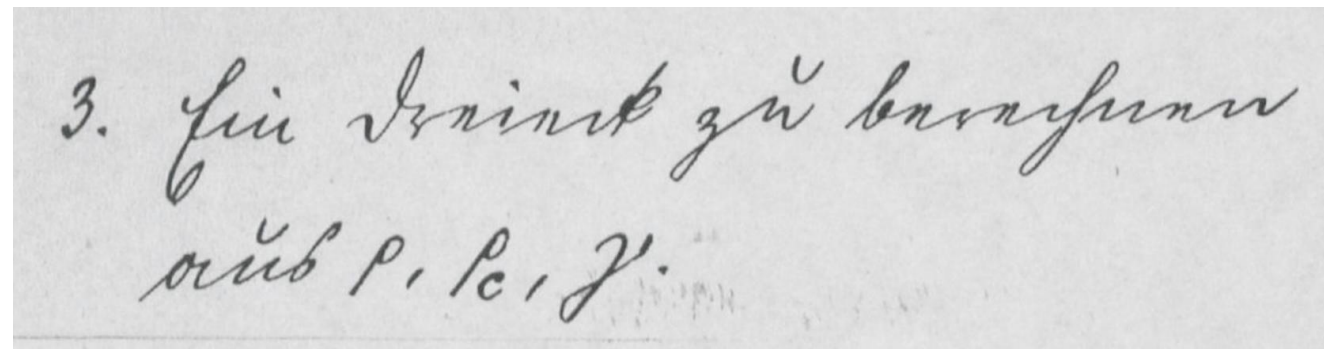
Rozwiąż trójkąt mając dane:

$$\rho, \rho_c, \gamma.$$

(matura z lutego 1908 r.)

(ρ oznacza promień okręgu wpisanego, ρ_c to promień okręgu dopisanego do boku naprzeciwko kąta γ)

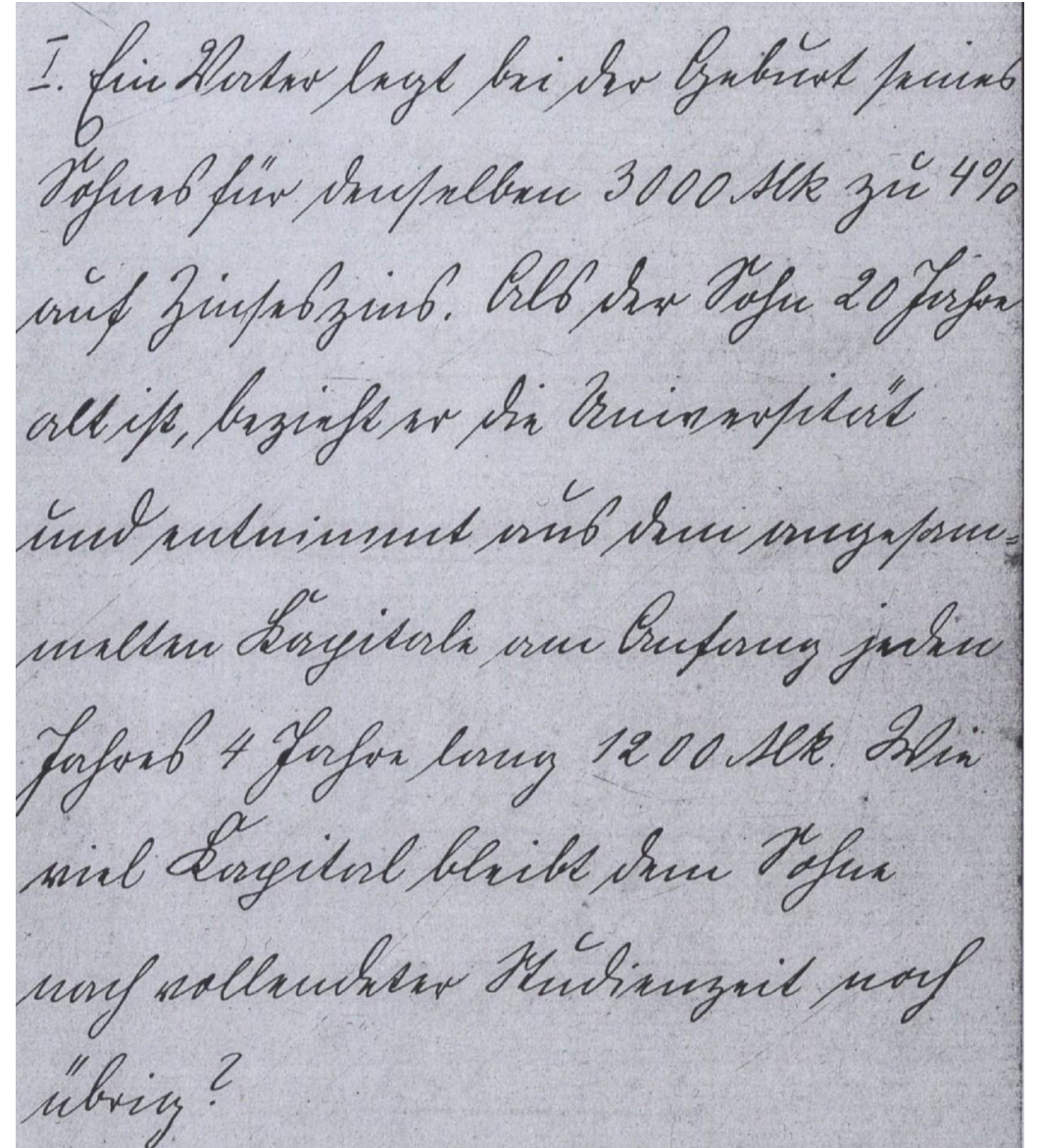
?Wzory Mollweidego?



Kapitał

Ojciec z okazji narodzin syna deponuje 3000 Marek oprocentowanych na 4% w skali roku. Gdy syn ma 20 lat wstępuje na uniwersytet i na początku każdego roku, przez 4 lata wypłaca ze zgromadzonego kapitału po 1200 Marek. Ile kapitału pozostanie synowi po ukończeniu studiów?

(matura z 18 lutego 1903 r.)



I. Ein Vater legt bei der Geburt seines
Sohnes für den Kapitalbau 3000 Mk zu 4%
auf Zinseszins. Als der Sohn 20 Jahre
alt ist, beginnt er die Universitäts-
studien und nimmt mit dem ersten
semestern Logarithmen und Geometrie jeden
Jahres 4 Jahre lang 1200 Mk. Wie
viel Kapital bleibt dem Sohn
nach vollendetem Studium?
Übrig?

Zadanie 3. (0–1)

Kwotę 1000 zł ulokowano w banku na roczną lokatę oprocentowaną w wysokości 4% w stosunku rocznym. Po zakończeniu lokaty od naliczonych odsetek odprowadzany jest podatek w wysokości 19%. Maksymalna kwota, jaką po upływie roku będzie można wypłacić z banku, jest równa

A. $1000 \cdot \left(1 - \frac{81}{100} \cdot \frac{4}{100}\right)$

B. $1000 \cdot \left(1 + \frac{19}{100} \cdot \frac{4}{100}\right)$

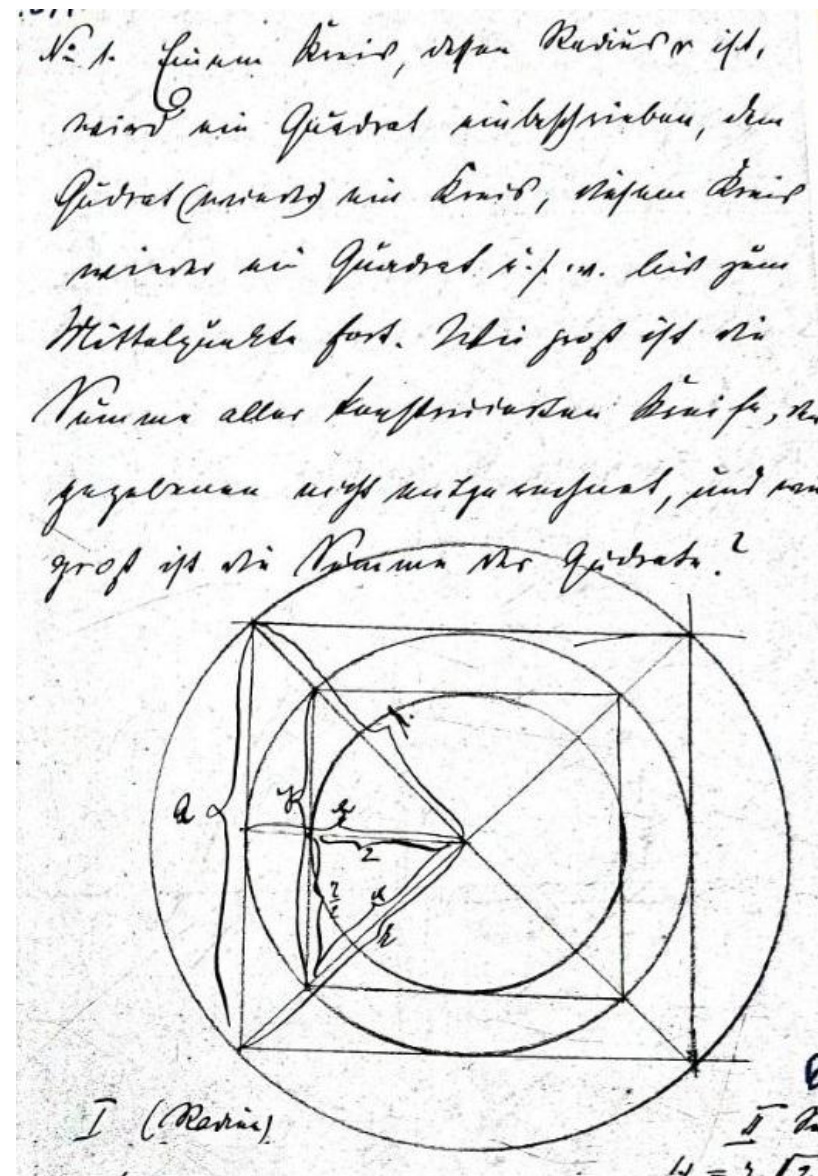
C. $1000 \cdot \left(1 + \frac{81}{100} \cdot \frac{4}{100}\right)$

D. $1000 \cdot \left(1 - \frac{19}{100} \cdot \frac{4}{100}\right)$

Ciąg kwadratów

Kwadrat jest wpisany w koło o promieniu r , koło w kwadrat, kwadrat w to koło i tak dalej do punktu środkowego. Jaka jest suma wszystkich pól zbudowanych kół poza danym i jaka jest suma pól wszystkich kwadratów?

(matura z 7 września 1909 r.)



Zadanie 10. (0–4)

Określamy kwadraty K_1 , K_2 , K_3 , ... następująco:

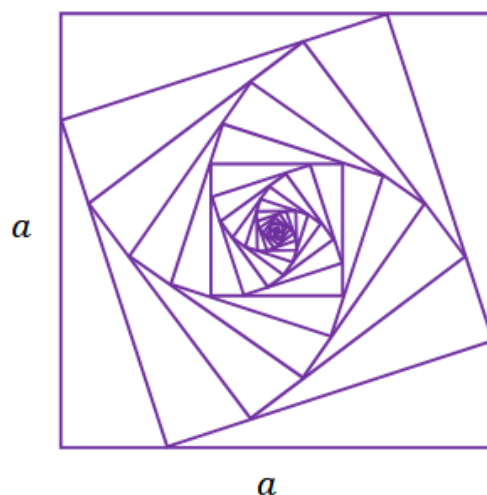
- K_1 jest kwadratem o boku długości a
- K_2 jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_1 i dzieli ten bok w stosunku $1 : 3$
- K_3 jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_2 i dzieli ten bok w stosunku $1 : 3$

i ogólnie, dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$,

- K_n jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_{n-1} i dzieli ten bok w stosunku $1 : 3$.

Obwody wszystkich kwadratów określonych powyżej tworzą nieskończony ciąg geometryczny.

Na rysunku przedstawiono kwadraty utworzone w sposób opisany powyżej.



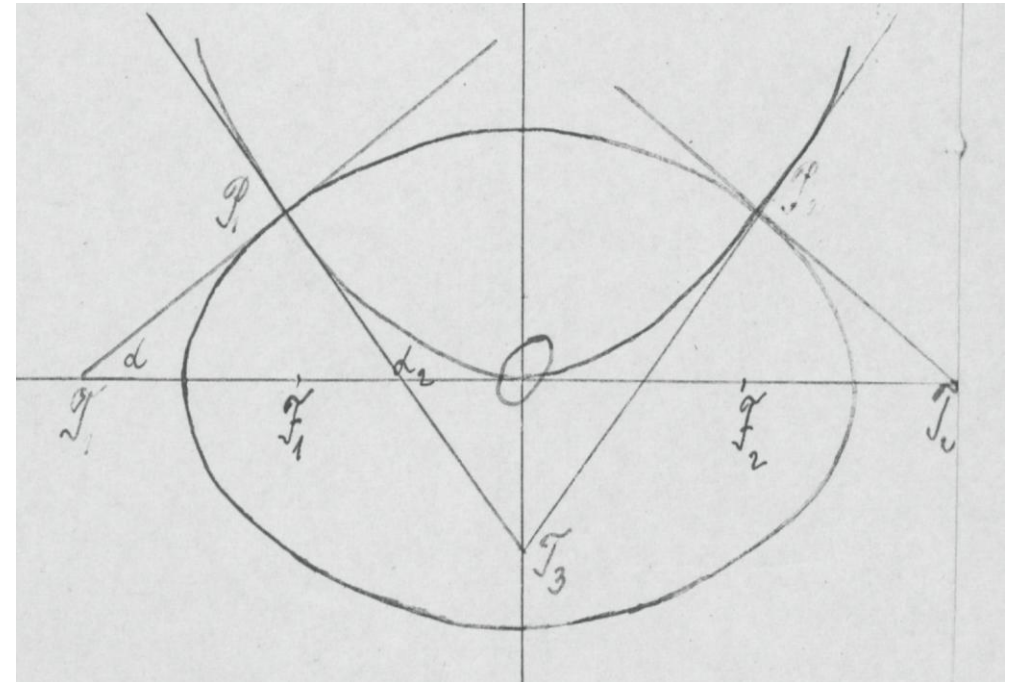
Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego nieskończonego ciągu. Zapisz obliczenia.

Inne zadania

- (1) Równania algebraiczne.
- (2) Soczewki.
- (3) Stożkowe.

$$\frac{\sqrt[3]{(a+x)^2} + \sqrt[3]{a^2-x^2} + \sqrt[3]{(a-x)^2}}{\sqrt[3]{(a+x)^2} - \sqrt[3]{a^2-x^2} + \sqrt[3]{(a-x)^2}} = c$$

$$x^3 - 3 = 0$$



PYTANIE 8:
matura podstawowa,
czy rozszerzona?

PYTANIE 9:

co dawała ówczesna matura?

Zygmunt Karpiński

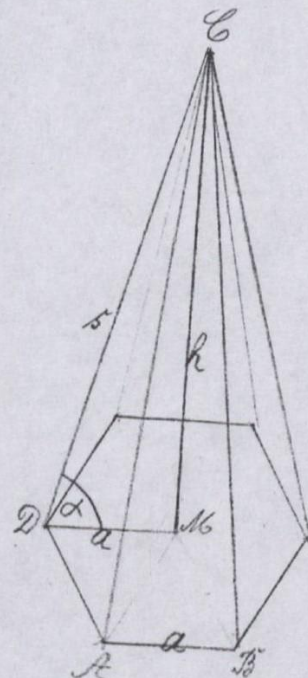
- 1892 – 1981, Matura: 1910 r.
- Syn adwokata Antoniego Karpińskiego – obrońcy polskich działaczy niepodległościowych,
- Siostrzeniec Heliodora Święckiego – założyciela i pierwszego rektora Uniwersytetu Poznańskiego
- Studia ekonomiczne w Strasburgu, Monachium i Berlinie
- Okres międzywojenny: sekretarz Komitetu Organizacyjnego i dyrektor działu walutowego Banku Polskiego
- 1939 r.: odpowiedzialny za ewakuację złota, dewiz i dokumentów Banku Polskiego do Francji



1. Külgarv:

Karpinski.

Liin magnumärgiga, 6-piiriga Pyra-
mide süü Alumiinium ($s=2,59$) ist
25,23 cm kõrg ja süü 6000 gr.
Mia loog siin ista kütam, süü
süüa mähkma süüa ist ista
süüa ist süüa süüa süüa?



$$P = V \cdot s$$

$$V = \frac{1}{3} g \cdot h$$

$$P = \frac{1}{3} g \cdot h \cdot s$$

$$g = \frac{3P}{h \cdot s}$$

$$I_{\Delta AMB} = \frac{g}{6} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

Ksawery Zakrzewski

- 1876 – 1915; Matura 1898 r.
- Lekarz, społecznik, działacz niepodległościowy,
- naczelnik poznańskiego „Sokoła”,
- współtwórca wielkopolskiego harcerstwa.

Ksawery von Zakrzewski

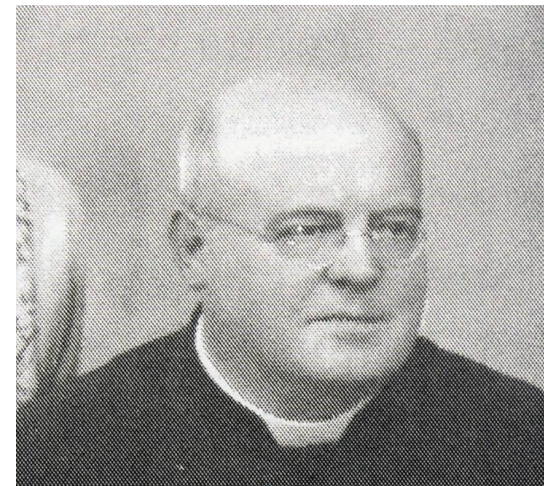
Guafan 1. 15. 2. 98.

*I. 1893 unmittelbar aus binomischen
Lehrsatz ab auf 5 Vermehrungen
zu kommen.*



Inni

- Eduard W. Wendorff - Przed 1907 r. organizował wyprawy na Cejlon i w Himalaje,
- Ks. Bronisław Kaźmierczak, ks. Józef Chilomer –działacze społeczni, zginęli w obozach koncentracyjnych
- Paweł Kazimierz Cymś – w 1919 r. dowodził kompanią wyzwalającą Trzemeszno, Mogilno, Strzelno, Kruszwicę i Inowrocław. Brał udział w wojnie polsko-bolszewickiej i w III Powstaniu Śląskim. W czasie II WŚ działał w ZWZ-AK



PYTANIE 10:
jaki z tego morał?

Źródła:

- S. Domaradzki, K. Karpińska, O egzaminie maturalnym z matematyki na obszarze zaboru pruskiego od XVIII do początku XX wieku [w:] *Antiquitates Mathematicae* vol. 11 (1) 2017, s. 157-201
- Archiwum Państwowe w Poznaniu Oddział w Gnieźnie, prace maturalne uczniów Państwowego Gimnazjum i Liceum Bolesława Chrobrego w Gnieźnie.
- Ordnung der Entlassungsprüfungen an den höheren Schulen, załącznik do pisma Provinzial Schul Kollegium z 11.06.1882 r., Archiwum Państwowe w Poznaniu Oddział w Gnieźnie, Państwowe Gimnazjum im. Bolesława Chrobrego w Gnieźnie, sygn. 380.
- Matematyka Dawnych Matur,
<https://jgarnek.faculty.wmi.amu.edu.pl/mdm>

lg EE

$$\ell B = 48^{\circ} 27' 51''; \ell E = 65^{\circ} 30'$$

$$\log \cos \ell B = \log \ell B - \log \ell E$$

$$\log \ell B = 20,05264 - 20$$

$$(-) \log \ell E = 10,34130^{(4)} - 10$$

$$\log \cos \ell B = 9,71134$$

$$\angle \ell B = 59^{\circ} 3' - 37''$$

$$\angle \ell B = 59^{\circ} 2' 23''$$

$$\angle A B = \alpha + \ell B$$

$$\angle A B = 79^{\circ} 22' 23''$$

$$\cos A B = \cos A C \cdot \cos \ell B + \sin A C \cdot \sin \ell B$$

$$A C = 600 \text{ m} = 40^{\circ}; \ell B = 48^{\circ} 27' 51'' \cdot \frac{1}{\cos A B}$$

$$\lg \sin \ell B = 9,87421$$

$$\lg \cos \ell B = 9,26241$$

$$\text{Summa} = 28,94469 - 30$$

$$\text{Num } 0,94469 - 2 = 0,08804$$

$$\sin A C \cdot \sin \ell B \cdot \cos A B = 0,08804$$

$$\cos A B = 0,50817 + 0,08804$$

$$\lg 0,59621 = 9,77540$$

$$\lg \cos A B = 9,77540$$

$$A B = 53^{\circ} 24' \quad | \quad 53 \frac{24}{60} = 53 \frac{2}{5}$$

$$\text{Auf } 1^{\circ} \text{ kommen } 15 \text{ Kilom}$$

$$\text{Auf } (53 \frac{2}{5})^{\circ} \quad " \quad 15 \cdot 53 \frac{2}{5}$$

$$n = \frac{1,39234}{1}$$

$$\log$$

$$\log 13$$

$$\log 2$$

$$\log 3$$

vor gewirkt im
mit mit P, mit

so ist

$$D = V \cdot \sigma$$

$$= \frac{4}{3} A^3 \cdot \pi \cdot \sigma$$

$$\log$$

$$\log$$

$$\log$$

$$\log$$

$$\log$$

$$\log$$