Subiektywny przegląd najważniejszych pojęć matematyki,
czyli Matematyczna Lista Przebojów

Jędrzej Garnek

17 listopada 2017

http://jgarnek.faculty.wmi.amu.edu.pl/prezentacje

10. Algorytm

Definicja

Algorytm – skończony ciąg jasno zdefiniowanych czynności, koniecznych do wykonania pewnego rodzaju zadań.

Definicja

Algorytm – skończony ciąg jasno zdefiniowanych czynności, koniecznych do wykonania pewnego rodzaju zadań.

- konstruktywne metody w matematyce,

Definicja

Algorytm – skończony ciąg jasno zdefiniowanych czynności, koniecznych do wykonania pewnego rodzaju zadań.

- konstruktywne metody w matematyce,
- czy komputer zastąpi matematyka?

Niezmiennik

9. Niezmiennik

Przykład

Mamy daną tabelę, złożoną z 7 liczb (-1). W każdym ruchu możemy zmienić jednocześnie znak dokładnie dwóch liczb w tabeli. Czy możemy w ten sposób otrzymać tabelę, złożoną z 7 jedynek?

Przykład

Mamy daną tabelę, złożoną z 7 liczb (-1). W każdym ruchu możemy zmienić jednocześnie znak dokładnie dwóch liczb w tabeli. Czy możemy w ten sposób otrzymać tabelę, złożoną z 7 jedynek?

-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

Przykład

Mamy daną tabelę, złożoną z 7 liczb (-1). W każdym ruchu możemy zmienić jednocześnie znak dokładnie dwóch liczb w tabeli. Czy możemy w ten sposób otrzymać tabelę, złożoną z 7 jedynek?

-1	**-1**	-1	-1	**-1**	-1	-1

-1	1	-1	-1	1	-1	-1

Przykład

Mamy daną tabelę, złożoną z 7 liczb (-1). W każdym ruchu możemy zmienić jednocześnie znak dokładnie dwóch liczb w tabeli. Czy możemy w ten sposób otrzymać tabelę, złożoną z 7 jedynek?

-1	**-1**	-1	-1	**-1**	-1	-1

-1	1	**-1**	-1	**1**	-1	-1

-1	1	1	-1	-1	-1	-1

Przykład

Mamy daną tabelę, złożoną z 7 liczb (-1). W każdym ruchu możemy zmienić jednocześnie znak dokładnie dwóch liczb w tabeli. Czy możemy w ten sposób otrzymać tabelę, złożoną z 7 jedynek?

-1	**-1**	-1	-1	**-1**	-1	-1

-1	1	**-1**	-1	**1**	-1	-1

-1	1	1	**-1**	**-1**	-1	-1

-1	1	1	1	1	-1	-1

Przykład

Mamy daną tabelę, złożoną z 7 liczb (-1). W każdym ruchu możemy zmienić jednocześnie znak dokładnie dwóch liczb w tabeli. Czy możemy w ten sposób otrzymać tabelę, złożoną z 7 jedynek?

-1	**-1**	-1	-1	**-1**	-1	-1

-1	1	**-1**	-1	**1**	-1	-1

-1	1	1	**-1**	**-1**	-1	-1

-1	1	1	1	1	-1	-1

Iloczyn: -1

Przykład

Mamy daną tabelę, złożoną z 7 liczb (-1). W każdym ruchu możemy zmienić jednocześnie znak dokładnie dwóch liczb w tabeli. Czy możemy w ten sposób otrzymać tabelę, złożoną z 7 jedynek?

-1	**-1**	-1	-1	**-1**	-1	-1

Iloczyn: -1

-1	1	**-1**	-1	**1**	-1	-1

Iloczyn: -1

-1	1	1	**-1**	**-1**	-1	-1

-1	1	1	1	1	-1	-1

Przykład

Mamy daną tabelę, złożoną z 7 liczb (-1). W każdym ruchu możemy zmienić jednocześnie znak dokładnie dwóch liczb w tabeli. Czy możemy w ten sposób otrzymać tabelę, złożoną z 7 jedynek?

-1	**-1**	-1	-1	**-1**	-1	-1	Iloczyn: -1
-1	1	**-1**	-1	**1**	-1	-1	Iloczyn: -1
-1	1	1	**-1**	**-1**	-1	-1	Iloczyn: -1
-1	1	1	1	1	-1	-1	

Przykład

Mamy daną tabelę, złożoną z 7 liczb (-1). W każdym ruchu możemy zmienić jednocześnie znak dokładnie dwóch liczb w tabeli. Czy możemy w ten sposób otrzymać tabelę, złożoną z 7 jedynek?

-1	**-1**	-1	-1	**-1**	-1	-1	Iloczyn: -1
-1	1	**-1**	-1	**1**	-1	-1	Iloczyn: -1
-1	1	1	**-1**	**-1**	-1	-1	Iloczyn: -1
-1	1	1	1	1	-1	-1	Iloczyn: -1

Przykład

Mamy daną tabelę, złożoną z 7 liczb (-1). W każdym ruchu możemy zmienić jednocześnie znak dokładnie dwóch liczb w tabeli. Czy możemy w ten sposób otrzymać tabelę, złożoną z 7 jedynek?

-1	**-1**	-1	-1	**-1**	-1	-1	Iloczyn: -1
-1	1	**-1**	-1	**1**	-1	-1	Iloczyn: -1
-1	1	1	**-1**	**-1**	-1	-1	Iloczyn: -1
-1	1	1	1	1	-1	-1	Iloczyn: -1

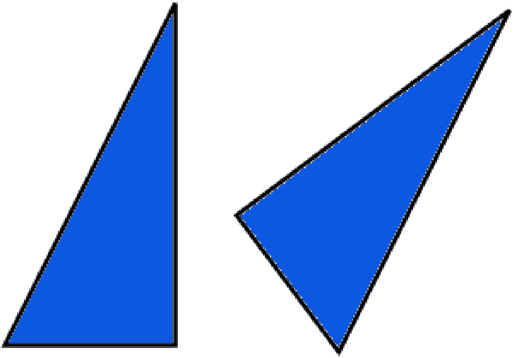
1	1	1	1	1	1	1

Przykład

Mamy daną tabelę, złożoną z 7 liczb (-1). W każdym ruchu możemy zmienić jednocześnie znak dokładnie dwóch liczb w tabeli. Czy możemy w ten sposób otrzymać tabelę, złożoną z 7 jedynek?

-1	**-1**	-1	-1	**-1**	-1	-1	Iloczyn: -1
-1	1	**-1**	-1	**1**	-1	-1	Iloczyn: -1
-1	1	1	**-1**	**-1**	-1	-1	Iloczyn: -1
-1	1	1	1	1	-1	-1	Iloczyn: -1

1	1	1	1	1	1	1	**Iloczyn: 1**



Geometria: nie rozróżniamy przystających zbiorów.

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

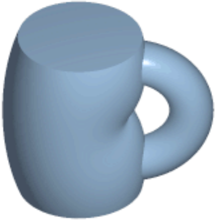
Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

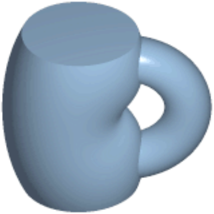
Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

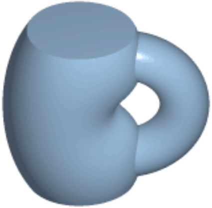
Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).



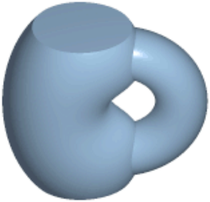
Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).



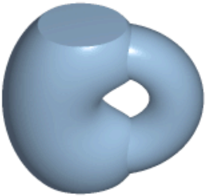
Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).



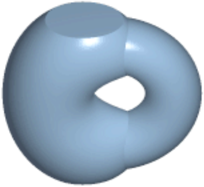
Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).



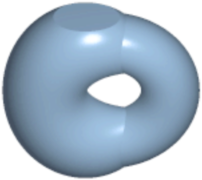
Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).



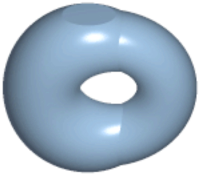
Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).



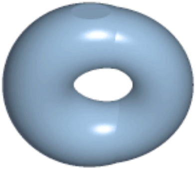
Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).



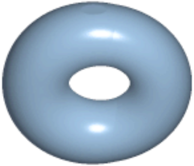
Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).



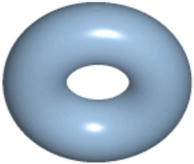
Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).



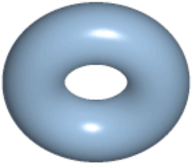
Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).



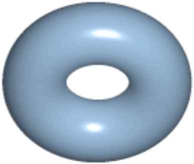
Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).



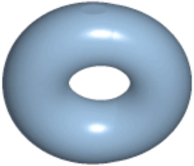
Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).



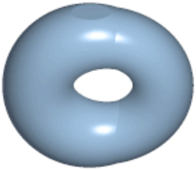
Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).



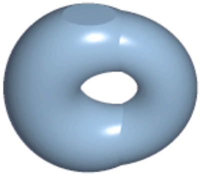
Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).



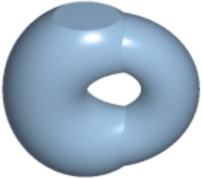
Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).



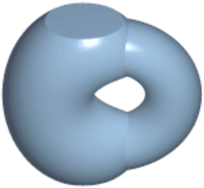
Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).



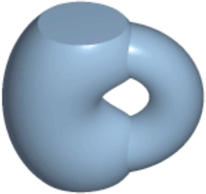
Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).



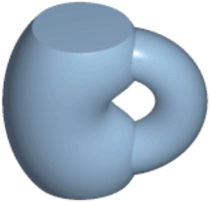
Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).



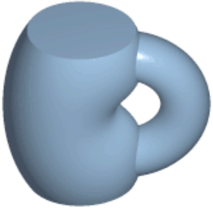
Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).



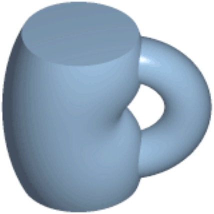
Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).



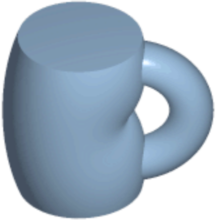
Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).



Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).



Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).



Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Topologia: nie rozróżniamy homeomorficznych zbiorów (intuicyjnie: umiemy tak ścisnąć, rozciągnąć, wygiąć, skręcić figurę, nie robiąc w niej dziur, nie rozrywając i nie sklejając jej fragmentów, by uzyskać drugą).

Charakterystyka Eulera

$$\begin{aligned}\chi(E) \ := \ & \text{liczba ścian:} \ - \ \text{liczba krawędzi:} \\ + \ & \text{liczba wierzchołków:}\end{aligned}$$

Czworościan:

liczba ścian:

liczba krawędzi:

liczba wierzchołków:

$$\chi(E) = \quad - \quad +$$

Czworościan:

liczba ścian:	4
liczba krawędzi:	
liczba wierzchołków:	

$$\chi(E) = 4 - \quad +$$

Czworościan:

liczba ścian:	4
liczba krawędzi:	6
liczba wierzchołków:	

$$\chi(E) = 4 - 6 +$$

Czworościan:

liczba ścian:	4
liczba krawędzi:	6
liczba wierzchołków:	4

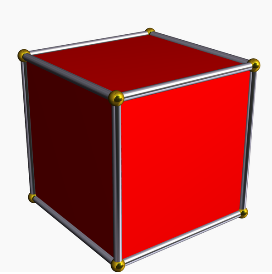
$$\chi(E) = 4 - 6 + 4$$

Czworościan:

liczba ścian:	4
liczba krawędzi:	6
liczba wierzchołków:	4

$$\chi(E) = \quad 4 - 6 + 4 = 2$$

Sześcian:



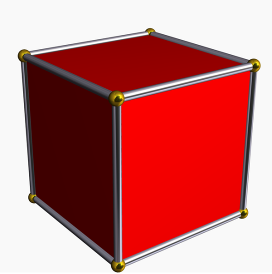
liczba ścian:

liczba krawędzi:

liczba wierzchołków:

$$\chi(E) = \quad - \quad +$$

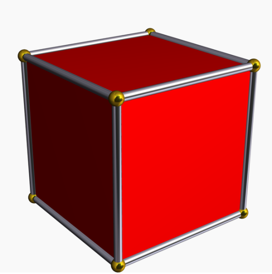
Sześcian:



liczba ścian:	6
liczba krawędzi:	
liczba wierzchołków:	

$$\chi(E) = 6 - \quad +$$

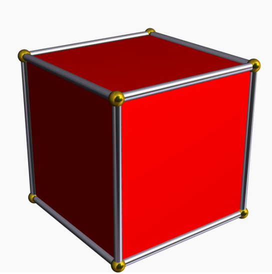
Sześcian:



liczba ścian:	6
liczba krawędzi:	12
liczba wierzchołków:	

$$\chi(E) = 6 - 12 +$$

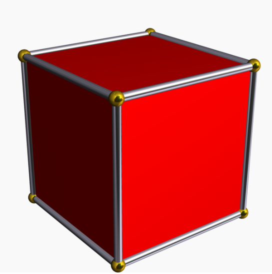
Sześcian:



liczba ścian:	6
liczba krawędzi:	12
liczba wierzchołków:	8

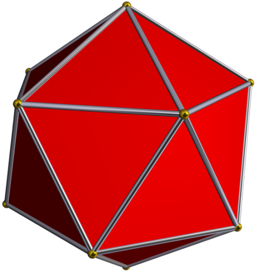
$$\chi(E) = 6 - 12 + 8$$

Sześcian:



$$\begin{aligned} \text{liczba ścian:} &\quad 6 \\ \text{liczba krawędzi:} &\quad 12 \\ \text{liczba wierzchołków:} &\quad 8 \\ \chi(E) = &\quad 6 - 12 + 8 = 2 \end{aligned}$$

Dwudziestościan:



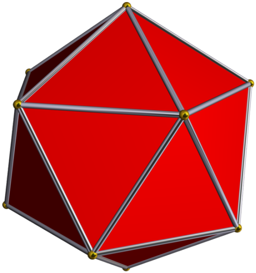
liczba ścian:

liczba krawędzi:

liczba wierzchołków:

$$\chi(E) = \quad - \quad +$$

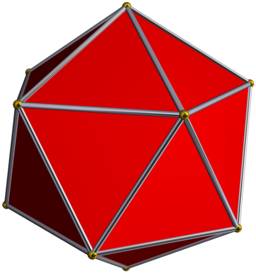
Dwudziestościan:



liczba ścian:	20
liczba krawędzi:	
liczba wierzchołków:	

$$\chi(E) = \quad 20 - \quad +$$

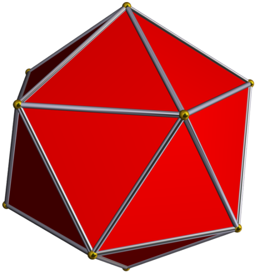
Dwudziestościan:



liczba ścian:	20
liczba krawędzi:	30
liczba wierzchołków:	

$$\chi(E) = 20 - 30 +$$

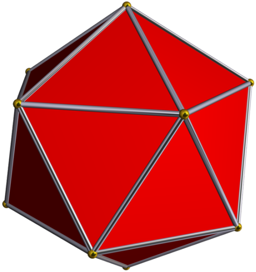
Dwudziestościan:



liczba ścian:	20
liczba krawędzi:	30
liczba wierzchołków:	12

$$\chi(E) = 20 - 30 + 12$$

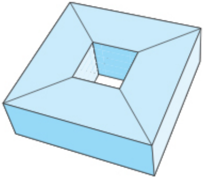
Dwudziestościan:



liczba ścian:	20
liczba krawędzi:	30
liczba wierzchołków:	12

$$\chi(E) = 20 - 30 + 12 = 2$$

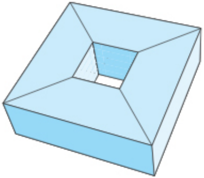
Takie dziwne coś



liczba ścian:
liczba krawędzi:
liczba wierzchołków:

$$\chi(E) = \quad - \quad +$$

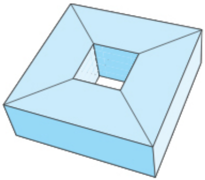
Takie dziwne coś



liczba ścian:	16
liczba krawędzi:	
liczba wierzchołków:	

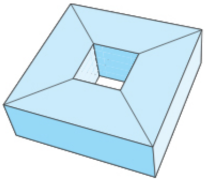
$$\chi(E) = \quad 16 - \qquad +$$

Takie dziwne coś



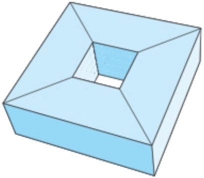
$$\begin{aligned} \text{liczba ścian:} &\quad 16 \\ \text{liczba krawędzi:} &\quad 32 \\ \text{liczba wierzchołków:} & \\ \chi(E) = &\quad 16 - 32 + \end{aligned}$$

Takie dziwne coś



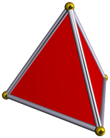
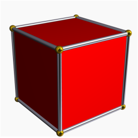
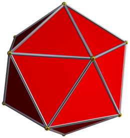
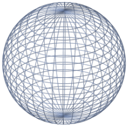
$$
\begin{aligned}
\text{liczba ścian:} & \quad 16 \\
\text{liczba krawędzi:} & \quad 32 \\
\text{liczba wierzchołków:} & \quad 16 \\
\chi(E) = & \quad 16 - 32 + 16
\end{aligned}
$$

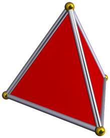
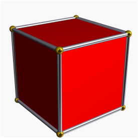
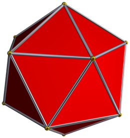
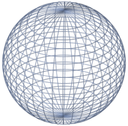
Takie dziwne coś

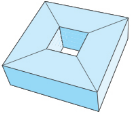
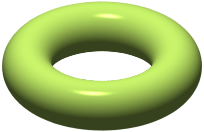


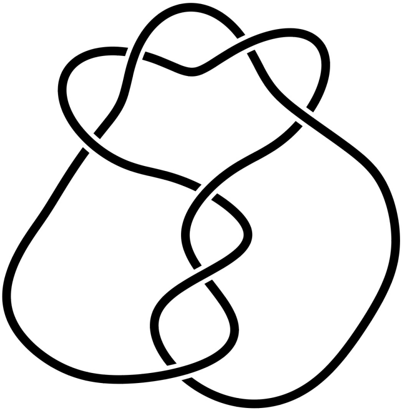
liczba ścian:	16
liczba krawędzi:	32
liczba wierzchołków:	16

$$\chi(E) = 16 - 32 + 16 = 0$$

 $\cong$  $\cong$  $\cong$ 

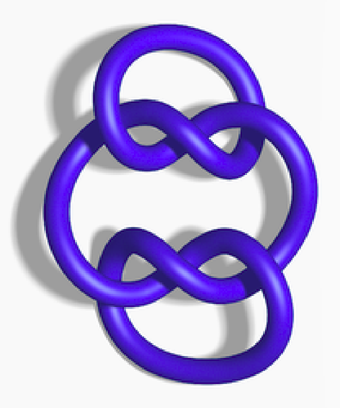
 $\cong$  $\cong$  $\cong$ 

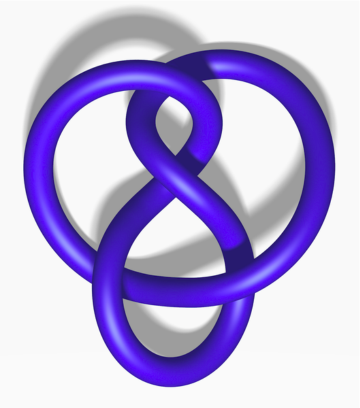
 $\cong$ 



Teoria węzłów : dwa węzły są równoważne, jeśli można je przekształcić jeden w drugi przez manipulacje sznurkiem bez rozcinania go i sklejania

Przykład:





Czy powyższe węzły są równoważne?

Trójkolorowalność

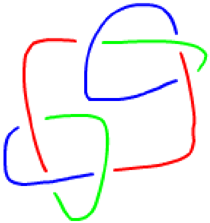
Trójkolorowanie węzła:

- są wykorzystane wszystkie trzy kolory,
- na każdym skrzyżowaniu wszystkie trzy "kawałki" sznurka są w tym samym kolorze lub w trzech różnych.

Trójkolorowalność

Trójkolorowanie węzła:

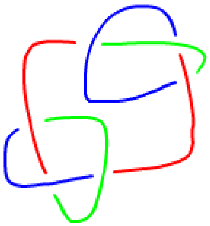
- są wykorzystane wszystkie trzy kolory,
- na każdym skrzyżowaniu wszystkie trzy "kawałki" sznurka są w tym samym kolorze lub w trzech różnych.

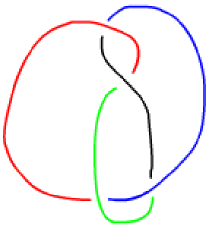


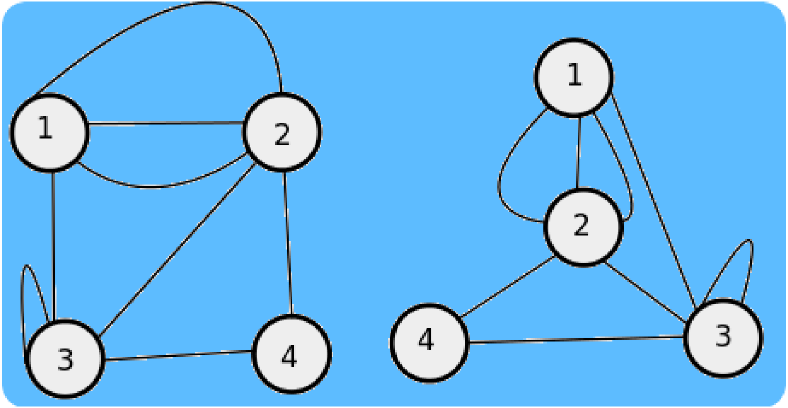
Trójkolorowalność

Trójkolorowanie węzła:

- są wykorzystane wszystkie trzy kolory,
- na każdym skrzyżowaniu wszystkie trzy "kawałki" sznurka są w tym samym kolorze lub w trzech różnych.







Teoria grafów

8. Grupa

Definicja

Grupą nazywamy zbiór G wraz z działaniem $\star$ (tzn. funkcją przyporządkowującą parze $a, b \in G$ element $a \star b \in G$), które spełnia następujące własności:

Definicja

Grupą nazywamy zbiór G wraz z działaniem $\star$ (tzn. funkcją przyporządkowującą parze $a, b \in G$ element $a \star b \in G$), które spełnia następujące własności:

(1) **(łączność)** dla dowolnych $a, b, c \in G$: $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$,

Definicja

Grupą nazywamy zbiór G wraz z działaniem $\star$ (tzn. funkcją przyporządkowującą parze $a, b \in G$ element $a \star b \in G$), które spełnia następujące własności:

(1) **(łączność)** dla dowolnych $a, b, c \in G$: $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$,

(2) **(istnienie elementu neutralnego)** istnieje $e \in G$ takie, że dla dowolnego $a \in G$: $a \star e = e \star a = a$,

Definicja

Grupą nazywamy zbiór G wraz z działaniem $\star$ (tzn. funkcją przyporządkowującą parze $a, b \in G$ element $a \star b \in G$), które spełnia następujące własności:

(1) **(łączność)** dla dowolnych $a, b, c \in G$: $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$,

(2) **(istnienie elementu neutralnego)** istnieje $e \in G$ takie, że dla dowolnego $a \in G$: $a \star e = e \star a = a$,

(3) **(istnienie elementu odwrotnego)** dla każdego $a \in G$ istnieje $a' \in G$ takie, że $a \star a' = a' \star a = e$

Przykład

Przykład

- zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ z działaniem $+$ **jest grupą**:

Przykład

- zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ z działaniem $+$ **jest grupą**:

  (1) $(a+b)+c = a+(b+c)$

Przykład

- zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ z działaniem $+$ **jest grupą**:
  (1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ ✓

Przykład

- zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ z działaniem $+$ **jest grupą**:
  (1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ ✓
  (2) $e = 0$ jest elementem neutralnym dodawania

Przykład

- zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ z działaniem $+$ **jest grupą**:
  (1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ ✓
  (2) $e = 0$ jest elementem neutralnym dodawania ✓

Przykład

- zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ z działaniem $+$ **jest grupą**:
  (1) $(a+b)+c=a+(b+c)$ ✓
  (2) $e=0$ jest elementem neutralnym dodawania ✓
  (3) dla każdego a liczba $a'=-a$ jest elementem odwrotnym: $(-a)+a=a+(-a)=0$

Przykład

- zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ z działaniem $+$ **jest grupą**:
  (1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ $\checkmark$
  (2) $e = 0$ jest elementem neutralnym dodawania $\checkmark$
  (3) dla każdego a liczba $a' = -a$ jest elementem odwrotnym: $(-a)+a = a+(-a) = 0$ $\checkmark$

Przykład

- zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ z działaniem $+$ **jest grupą**:
  (1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ ✓
  (2) $e = 0$ jest elementem neutralnym dodawania ✓
  (3) dla każdego a liczba $a' = -a$ jest elementem odwrotnym: $(-a)+a = a+(-a) = 0$ ✓

- zbiór liczb całkowitych dodatnich $\mathbb{Z}_+$ z działaniem $\cdot$ **nie jest grupą**:

Przykład

- zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ z działaniem $+$ **jest grupą**:
  (1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ ✓
  (2) $e = 0$ jest elementem neutralnym dodawania ✓
  (3) dla każdego a liczba $a' = -a$ jest elementem odwrotnym: $(-a)+a = a+(-a) = 0$ ✓

- zbiór liczb całkowitych dodatnich $\mathbb{Z}_+$ z działaniem $\cdot$ **nie jest grupą**:
  (1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Przykład

- zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ z działaniem $+$ **jest grupą**:
  (1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ ✓
  (2) $e = 0$ jest elementem neutralnym dodawania ✓
  (3) dla każdego a liczba $a' = -a$ jest elementem odwrotnym: $(-a)+a = a+(-a) = 0$ ✓
- zbiór liczb całkowitych dodatnich $\mathbb{Z}_+$ z działaniem $\cdot$ **nie jest grupą**:
  (1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ✓

Przykład

- zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ z działaniem $+$ **jest grupą**:
  (1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ ✓
  (2) $e=0$ jest elementem neutralnym dodawania ✓
  (3) dla każdego a liczba $a' = -a$ jest elementem odwrotnym:
  $(-a)+a = a+(-a) = 0$ ✓

- zbiór liczb całkowitych dodatnich $\mathbb{Z}_+$ z działaniem $\cdot$ **nie jest grupą**:
  (1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ✓
  (2) $e=1$ jest elementem neutralnym mnożenia

Przykład

- zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ z działaniem $+$ **jest grupą**:
  (1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ ✓
  (2) $e = 0$ jest elementem neutralnym dodawania ✓
  (3) dla każdego a liczba $a' = -a$ jest elementem odwrotnym: $(-a)+a = a+(-a) = 0$ ✓

- zbiór liczb całkowitych dodatnich $\mathbb{Z}_+$ z działaniem $\cdot$ **nie jest grupą**:
  (1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ✓
  (2) $e = 1$ jest elementem neutralnym mnożenia ✓

Przykład

- zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ z działaniem $+$ **jest grupą**:
  (1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ ✓
  (2) $e = 0$ jest elementem neutralnym dodawania ✓
  (3) dla każdego a liczba $a' = -a$ jest elementem odwrotnym:
  $(-a)+a = a+(-a) = 0$ ✓

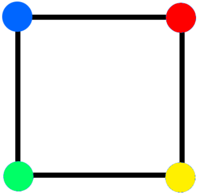
- zbiór liczb całkowitych dodatnich $\mathbb{Z}_+$ z działaniem $\cdot$ **nie jest grupą**:
  (1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ✓
  (2) $e = 1$ jest elementem neutralnym mnożenia ✓
  (3) liczba 2 **nie ma** całkowitej odwrotności
  (nie istnieje taka liczba całkowita a, że $2 \cdot a = 1$)

Przykład

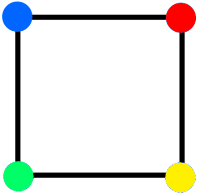
- zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ z działaniem $+$ **jest grupą**:
  (1) $(a+b)+c=a+(b+c)$ ✓
  (2) $e=0$ jest elementem neutralnym dodawania ✓
  (3) dla każdego a liczba $a'=-a$ jest elementem odwrotnym:
  $(-a)+a=a+(-a)=0$ ✓

- zbiór liczb całkowitych dodatnich $\mathbb{Z}_+$ z działaniem $\cdot$ **nie jest grupą**:
  (1) $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ ✓
  (2) $e=1$ jest elementem neutralnym mnożenia ✓
  (3) liczba 2 **nie ma** całkowitej odwrotności
  (nie istnieje taka liczba całkowita a, że $2\cdot a=1$) $\times$

- grupa symetrii kwadratu,



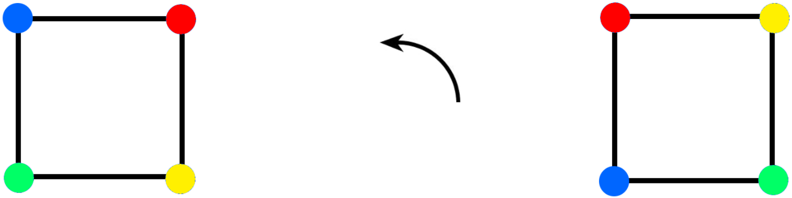
Kwadrat



Identyczność

$$G = \{ \text{ identyczność,} \qquad \}$$

- grupa symetrii kwadratu,

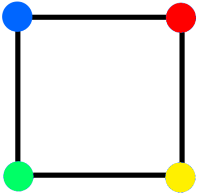


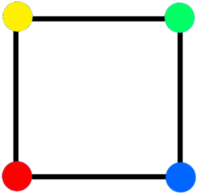
Kwadrat **Obrót o** 90^{o}

$$G = \{\ \text{identyczność},\ \ \text{obrót o } 90^{o},$$

$$\}$$

- grupa symetrii kwadratu,





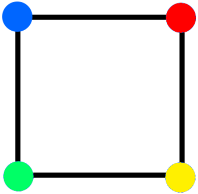
Kwadrat

Obrót o 180^o

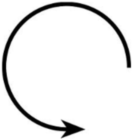
$$G = \{ \text{ identyczność}, \ \text{ obrót o } 90^o, \ \text{ obrót o } 180^o,$$

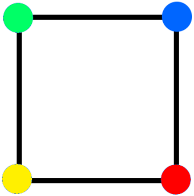
$$\}$$

- grupa symetrii kwadratu,



Kwadrat

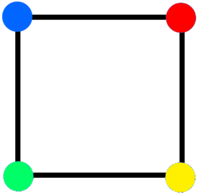




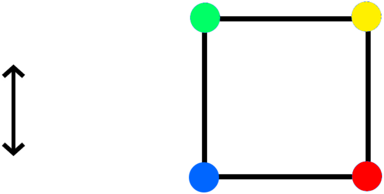
Obrót o 270^o

$$G = \{ \text{ identyczność, } \ \text{obrót o } 90^o, \ \text{obrót o } 180^o, \ \text{obrót o } 270^o, \qquad \}$$

- grupa symetrii kwadratu,



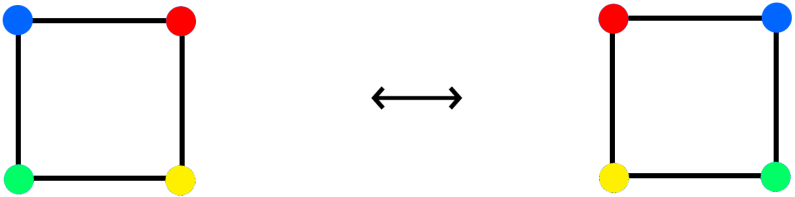
Kwadrat



Symetria „pionowa"

$$G = \{ \text{ identyczność}, \ \text{obrót o } 90^o, \ \text{obrót o } 180^o, \ \text{obrót o } 270^o, \ \text{symetria „pionowa"}, \qquad \}$$

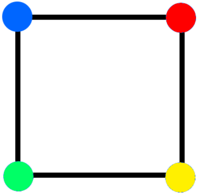
- grupa symetrii kwadratu,



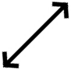
Kwadrat **Symetria „pozioma"**

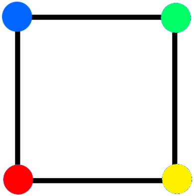
$$G = \{\ \text{identyczność},\ \ \text{obrót o } 90^o,\ \ \text{obrót o } 180^o,\ \ \text{obrót o } 270^o,\ \ \text{symetria „pionowa"},\ \ \text{symetria „pozioma"},\ \}$$

- grupa symetrii kwadratu,



Kwadrat

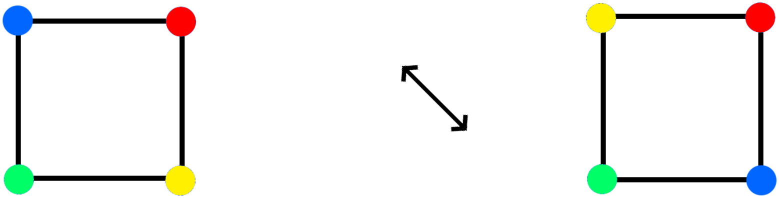




Symetria ukośna 1

$G = \{$ identyczność, obrót o 90^o, obrót o 180^o, obrót o 270^o, symetria „pionowa”, symetria „pozioma”, symetria ukośna 1, $\}$

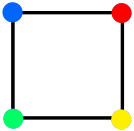
- grupa symetrii kwadratu,



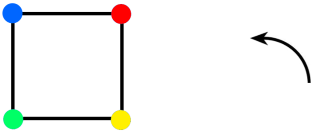
Kwadrat **Symetria ukośna 2**

$G = \{$ identyczność, obrót o 90^o, obrót o 180^o, obrót o 270^o, symetria „pionowa”, symetria „pozioma”, symetria ukośna 1, symetria ukośna 2 $\}$

Działanie: składanie symetrii.

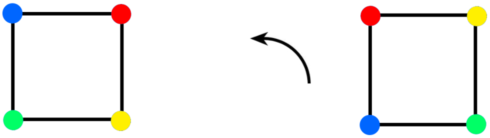


Działanie: składanie symetrii.



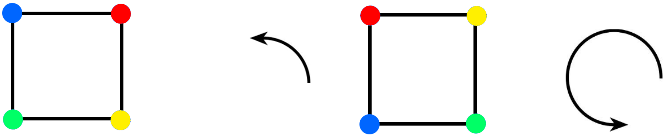
obrót o 90^o

Działanie: składanie symetrii.



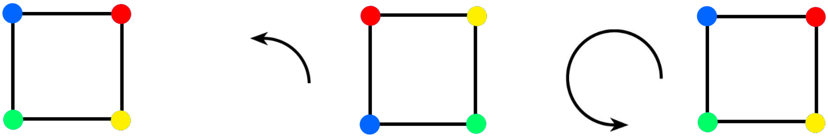
obrót o 90^o $\star$

Działanie: składanie symetrii.



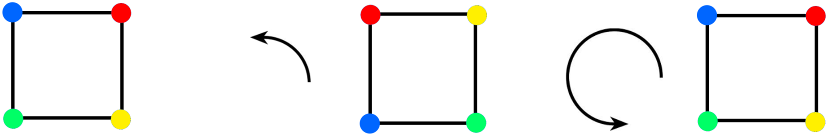
obrót o 90^o $\star$ obrót o 270^o

Działanie: składanie symetrii.

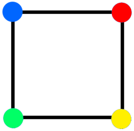


obrót o $90^o \star$ obrót o $270^o =$ identyczność

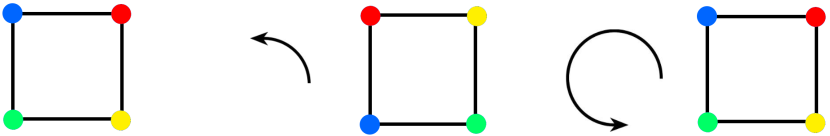
Działanie: składanie symetrii.



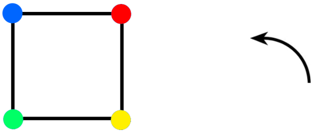
obrót o 90^o $\star$ obrót o 270^o $=$ identyczność



Działanie: składanie symetrii.

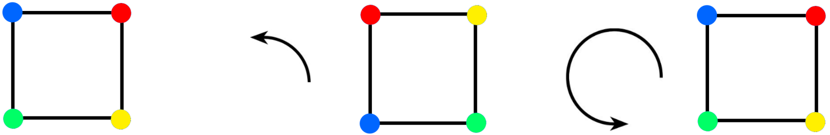


obrót o $90^o \star$ obrót o $270^o =$ identyczność

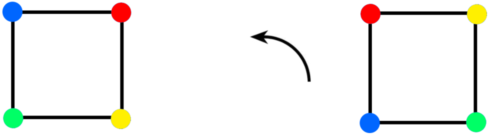


obrót o 90^o

Działanie: składanie symetrii.

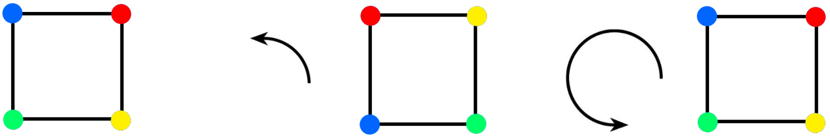


obrót o $90^o \star$ obrót o $270^o =$ identyczność

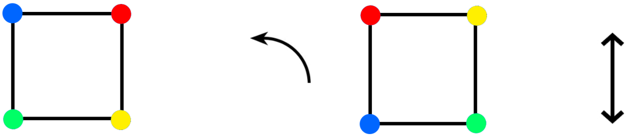


obrót o $90^o \star$

Działanie: składanie symetrii.

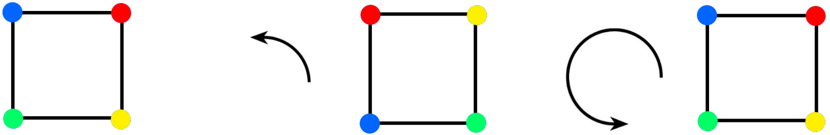


obrót o 90^o $\star$ obrót o 270^o $=$ identyczność

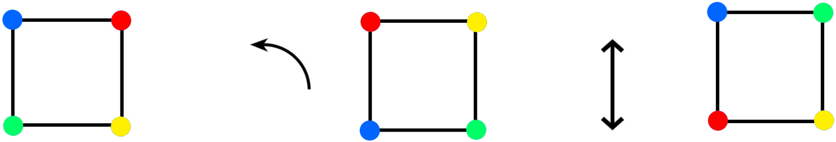


obrót o 90^o $\star$ symetria „pionowa”

Działanie: składanie symetrii.



obrót o 90^o $\star$ obrót o 270^o $=$ identyczność



obrót o 90^o $\star$ symetria „pionowa” $=$ symetria „ukośna” 1

- badanie, rozróżnianie i zliczanie cząsteczek chemicznych (po przez badanie ich grup symetrii),

- badanie, rozróżnianie i zliczanie cząsteczek chemicznych (po przez badanie ich grup symetrii),
- badanie pierwiastków wielomianów (tzw. **teoria Galois**),

- badanie, rozróżnianie i zliczanie cząsteczek chemicznych (po przez badanie ich grup symetrii),
- badanie pierwiastków wielomianów (tzw. **teoria Galois**),

Twierdzenie Abela-Ruffiniego

Dla ogólnych wielomianów stopnia $\geqslant 5$ nie istnieją wzory algebraiczne, pozwalające na wyznaczenie ich pierwiastków,

- badanie, rozróżnianie i zliczanie cząsteczek chemicznych (po przez badanie ich grup symetrii),
- badanie pierwiastków wielomianów (tzw. **teoria Galois**),

Twierdzenie Abela-Ruffiniego

Dla ogólnych wielomianów stopnia $\geqslant 5$ nie istnieją wzory algebraiczne, pozwalające na wyznaczenie ich pierwiastków,

- ciekawe niezmienniki (**topologia:** grupy homotopii, homologii i kohomologii, **teoria węzłów:** kohomologie Khowanowa)

„Matematyka jest sztuką nadawania różnym rzeczom tych samych nazw…”

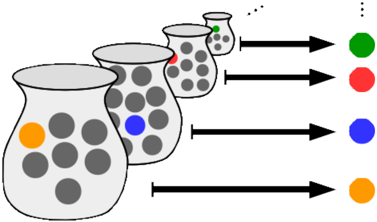
„Matematyka jest sztuką nadawania różnym rzeczom tych samych nazw...”

– Jules Henri Poincaré (1854–1912)

7. Aksjomat wyboru

Definicja

Aksjomat wyboru – mając daną dowolną rodzinę zbiorów niepustych, możemy z każdego z nich wybrać jeden element.



Paradoks Banacha-Tarskiego

Kula może być pocięta na skończenie wiele kawałków, z których można złożyć za pomocą izometrii dwie kule identyczne z kulą wyjściową.

Paradoks Banacha-Tarskiego

Kula może być pocięta na skończenie wiele kawałków, z których można złożyć za pomocą izometrii dwie kule identyczne z kulą wyjściową.

- niekonstruktywne metody matematyki!


I CARVED AND CARVED, AND THE NEXT THING I KNEW I HAD TWO PUMPKINS.
I TOLD YOU NOT TO TAKE THE AXIOM OF CHOICE.

Liczby pierwsze

6. Liczby pierwsze

Definicja

Liczba pierwsza - liczba całkowita dodatnia, która ma dokładnie 2 dzielniki naturalne.

Definicja

Liczba pierwsza - liczba całkowita dodatnia, która ma dokładnie 2 dzielniki naturalne.

Definicja

Liczba pierwsza - liczba całkowita dodatnia, która ma dokładnie 2 dzielniki naturalne.

Po co przejmować się liczbami pierwszymi?

Definicja

Liczba pierwsza - liczba całkowita dodatnia, która ma dokładnie 2 dzielniki naturalne.

Po co przejmować się liczbami pierwszymi?

- Każda liczba naturalna ma jednoznaczny rozkład na czynniki pierwsze.

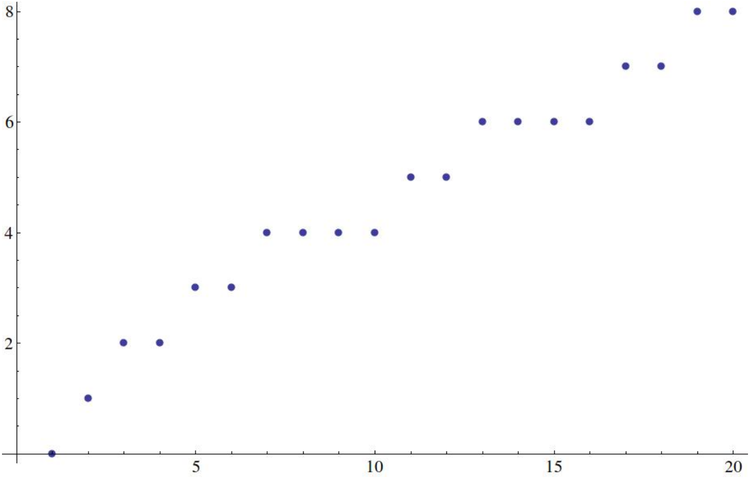
Definicja

Liczba pierwsza - liczba całkowita dodatnia, która ma dokładnie 2 dzielniki naturalne.

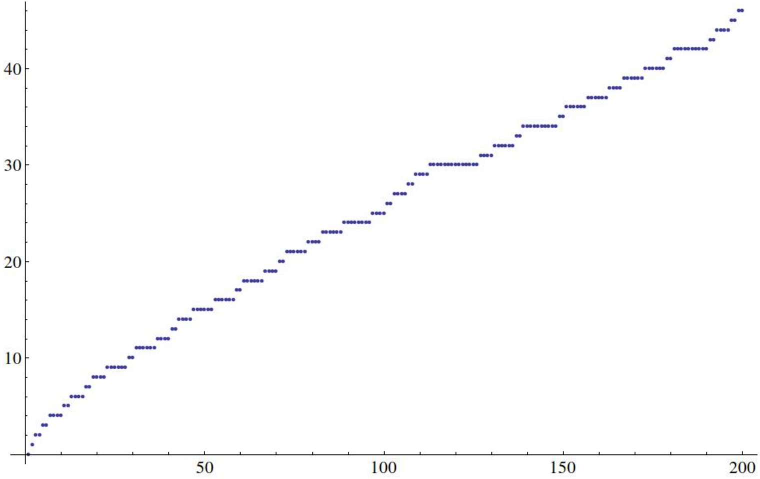
Po co przejmować się liczbami pierwszymi?

- Każda liczba naturalna ma jednoznaczny rozkład na czynniki pierwsze.
- RSA.

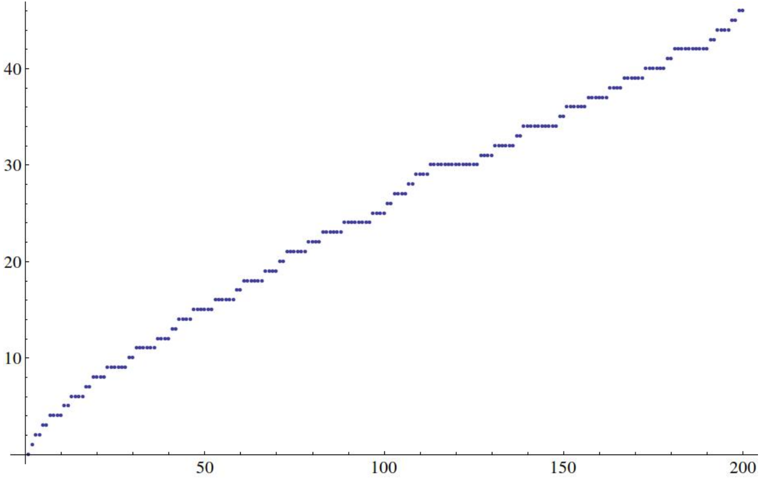
Ile liczb pierwszych jest w przedziale od 1 do n?



Ile liczb pierwszych jest w przedziale od 1 do n?



Ile liczb pierwszych jest w przedziale od 1 do n?



Około $\frac{n}{\ln n}$

Co wiemy o liczbach pierwszych?

Co wiemy o liczbach pierwszych?

- Jest ich nieskończenie wiele (Euklides).

Co wiemy o liczbach pierwszych?

- Jest ich nieskończenie wiele (Euklides).
- W przedziale $[1, n]$ jest ich ok. $\frac{n}{\ln n}$,

Co wiemy o liczbach pierwszych?

- Jest ich nieskończenie wiele (Euklides).
- W przedziale $[1, n]$ jest ich ok. $\frac{n}{\ln n}$,
- ...

Co wiemy o liczbach pierwszych?

- Jest ich nieskończenie wiele (Euklides).
- W przedziale $[1, n]$ jest ich ok. $\frac{n}{\ln n}$,
- ...

Problemy związane z liczbami pierwszymi:

Co wiemy o liczbach pierwszych?

- Jest ich nieskończenie wiele (Euklides).
- W przedziale $[1, n]$ jest ich ok. $\frac{n}{\ln n}$,
- ...

Problemy związane z liczbami pierwszymi:

- Jak dokładnie rozmieszczone są liczby pierwsze?

Co wiemy o liczbach pierwszych?

- Jest ich nieskończenie wiele (Euklides).
- W przedziale $[1, n]$ jest ich ok. $\frac{n}{\ln n}$,
- ...

Problemy związane z liczbami pierwszymi:

- Jak dokładnie rozmieszczone są liczby pierwsze?
- Czy istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci ...

Hipoteza liczb pierwszych bliźniaczych

Istnieje nieskończenie wiele par liczb pierwszych postaci $(p, p+2)$.

Hipoteza liczb pierwszych bliźniaczych

Istnieje nieskończenie wiele par liczb pierwszych postaci $(p, p+2)$.

Przykłady:

Hipoteza liczb pierwszych bliźniaczych

Istnieje nieskończenie wiele par liczb pierwszych postaci $(p, p+2)$.

Przykłady: $(5, 7)$,

Hipoteza liczb pierwszych bliźniaczych

Istnieje nieskończenie wiele par liczb pierwszych postaci $(p, p+2)$.

Przykłady: $(5, 7)$, $(11, 13)$,

Hipoteza liczb pierwszych bliźniaczych

Istnieje nieskończenie wiele par liczb pierwszych postaci $(p, p+2)$.

Przykłady: $(5,7)$, $(11,13)$, $(29,31)$

Hipoteza liczb pierwszych bliźniaczych

Istnieje nieskończenie wiele par liczb pierwszych postaci $(p, p+2)$.

Przykłady: $(5, 7)$, $(11, 13)$, $(29, 31)$

Twierdzenie (Zhang, 2013)

Istnieje nieskończenie wiele par różnych liczb pierwszych, które są oddalone od siebie o nie więcej niż... .

Hipoteza liczb pierwszych bliźniaczych

Istnieje nieskończenie wiele par liczb pierwszych postaci $(p, p+2)$.

Przykłady: $(5, 7)$, $(11, 13)$, $(29, 31)$

Twierdzenie (Zhang, 2013)

Istnieje nieskończenie wiele par różnych liczb pierwszych, które są oddalone od siebie o nie więcej niż... $7 \cdot 10^7$.

Czy 49 wraca do domu?

49

Czy 49 wraca do domu?

$$49 =$$

$$7 \cdot 7$$

Czy 49 wraca do domu?

49

77

Czy 49 wraca do domu?

$$49$$

$$77 =$$

$$7 \cdot 11$$

Czy 49 wraca do domu?

49

77

711

Czy 49 wraca do domu?

49

77

$711 =$

$3 \cdot 3 \cdot 79$

Czy 49 wraca do domu?

49

77

711

3379

Czy 49 wraca do domu?

49

77

711

$3379 =$

$31 \cdot 109$

Czy 49 wraca do domu?

49

77

711

3379

31109

Czy 49 wraca do domu?

49

77

711

3379

$31109 =$

$\ldots$

Czy 49 wraca do domu?

49

77

711

3379

31109

. . .

Czy dojdziemy kiedyś do liczby pierwszej?

5. Funkcja

Drugie prawo dynamiki Newtona

$$\vec{F}(t) = m \cdot a(t)$$

Drugie prawo dynamiki Newtona

$$\vec{F}(t) = m \cdot a(t) \qquad = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Drugie prawo dynamiki Newtona

$$\vec{F}(t) = m \cdot a(t) \qquad = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Równanie falowe

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u - c^2 \cdot \triangle_x u = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Równania Maxwella

$$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu I + \mu\varepsilon \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t}$$

$$\varepsilon \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = q$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$$

Równania Maxwella

$$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu I + \mu\varepsilon \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t}$$

$$\varepsilon \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = q$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$$

„... i stała się światłość”

Równania Maxwella

$$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu I + \mu\varepsilon \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t}$$

$$\varepsilon \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = q$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$$

„... i stała się światłość”

Równanie Schrödingera

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t),$$

Nieskończoność

4. Nieskończoność

„Badacz nieskończoności”

„Badacz nieskończoności"

– napis na grobie Wacława Sierpińskiego (1882 - 1969)

Teoria mnogości

Każda „nieskończoność” jest „ilością elementów” pewnego zbioru (tzw. **liczby kardynalne**).

Teoria mnogości

Każda „nieskończoność" jest „ilością elementów" pewnego zbioru (tzw. **liczby kardynalne**).

- $\aleph_0$ – ilość elementów w zbiorach np. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$,

Teoria mnogości

Każda „nieskończoność" jest „ilością elementów" pewnego zbioru (tzw. **liczby kardynalne**).

- $\aleph_0$ – ilość elementów w zbiorach np. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$,
- $\mathfrak{C}$ – ilość elementów w zbiorach np. $(0, 1)$, $[0, 1]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$,

Teoria mnogości

Każda „nieskończoność" jest „ilością elementów" pewnego zbioru (tzw. **liczby kardynalne**).

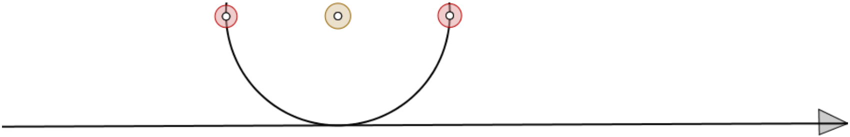
- $\aleph_0$ – ilość elementów w zbiorach np. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$,
- $\mathfrak{C}$ – ilość elementów w zbiorach np. $(0,1)$, $[0,1]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$,
- $2^{\mathfrak{C}}$ – ilość elementów np. w zbiorze wszystkich podzbiorów $\mathbb{R}$,

Teoria mnogości

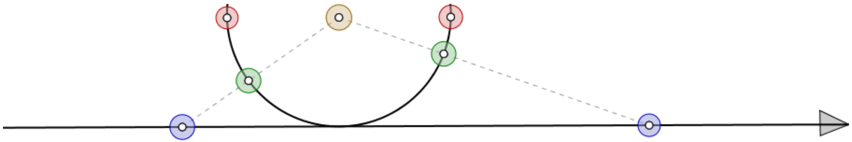
Każda „nieskończoność” jest „ilością elementów” pewnego zbioru (tzw. **liczby kardynalne**).

- $\aleph_0$ – ilość elementów w zbiorach np. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$,
- $\mathfrak{C}$ – ilość elementów w zbiorach np. $(0,1)$, $[0,1]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$,
- $2^{\mathfrak{C}}$ – ilość elementów np. w zbiorze wszystkich podzbiorów $\mathbb{R}$,
- ...

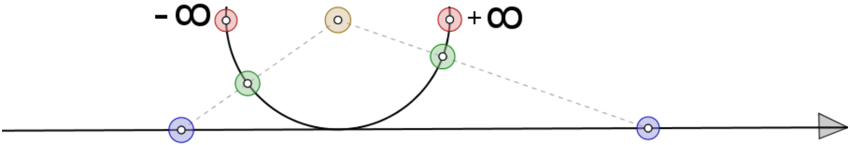
Topologia



Topologia



Topologia



10. Algorytm

10. Algorytm
9. Niezmiennik

10. Algorytm
9. Niezmiennik
8. Grupa

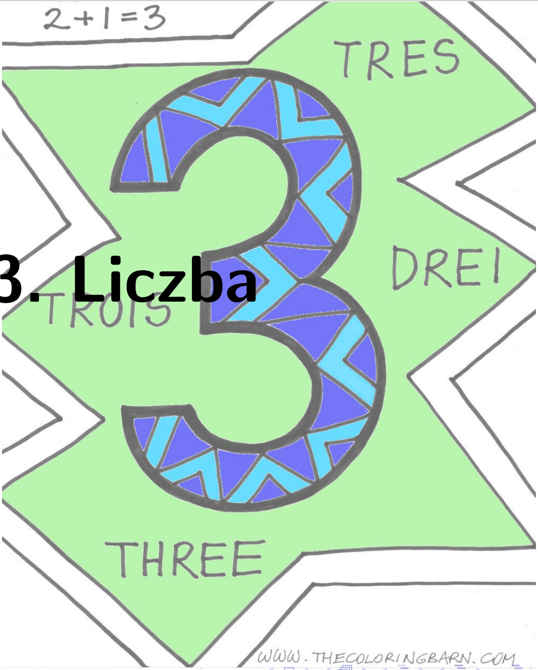
10. Algorytm
9. Niezmiennik
8. Grupa
7. Aksjomat wyboru

10. Algorytm
9. Niezmiennik
8. Grupa
7. Aksjomat wyboru
6. Liczba pierwsza

10. Algorytm
9. Niezmiennik
8. Grupa
7. Aksjomat wyboru
6. Liczba pierwsza
5. Funkcja

10. Algorytm
9. Niezmiennik
8. Grupa
7. Aksjomat wyboru
6. Liczba pierwsza
5. Funkcja
4. Nieskończoność

3. Liczba



„Wszystko jest liczbą!”

„Wszystko jest liczbą!”

– jedno z haseł pitagorejczyków (uczniów Pitagorasa)

„Dobry Bóg stworzył liczby naturalne, reszta jest dziełem człowieka..."

„Dobry Bóg stworzył liczby naturalne, reszta jest dziełem człowieka...”

– **Leopold Kronecker** (1823-1891), matematyk niemiecki

$$1,$$

1, 2,

$$1, 2, 3,$$

$$1, 2, 3, \ldots$$

$$1, 2, 3, \ldots$$

Co się stanie, gdy odejmiemy dwie równe liczby?

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Co się stanie, gdy odejmiemy większą liczbę od mniejszej?

-1, 0, 1, 2, 3, ...

-2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

$$\mathbb{Z} =$$

$$\{\ldots,\ \text{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, } \ldots\ \}$$

$$\mathbb{Z} =$$

$$\{\ldots, \ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ \ldots\ \}$$

Co się stanie, gdy podzielimy np. 2 przez 1?

$$\mathbb{Z} =$$

$$\{\ldots,\ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

$$\mathbb{Q} =$$

$$\left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$$

$$\mathbb{Z} =$$

$$\{\ldots,\ \text{-}3, \text{-}2, \text{-}1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

$$\mathbb{Q} =$$

$$\left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$$

Jaką długość ma przekątna kwadratu o boku 1?
Jak rozwiązać równanie $x^2 = 2$?

$\mathbb{Z} =$

$\{\ldots,\ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Q} =$

$$\left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$$

Jaką długość ma przekątna kwadratu o boku 1?
Jak rozwiązać równanie $x^2 = 2$?
Jak mierzyć długości?

$\mathbb{Z} =$

$\{\ldots,\ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Q} =$

$$\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$$

$\mathbb{R}$

Jak rozwiązać równanie $x^2 = -1$?

Jak rozwiązać równanie $x^2 = -1$?

$$i^2 = -1$$

Jak rozwiązać równanie $x^2 = -1$?

$$i^2 = -1$$

liczby zespolone:

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Jak rozwiązać równanie $x^2 = -1$?

$$i^2 = -1$$

liczby zespolone:

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Każdy (niestały) wielomian ma pierwiastek zespolony!

Inne rodzaje liczb:

Inne rodzaje liczb:

- kwaterniony $\mathbb{H}$ i oktawy Cayleya $\mathbb{O}$ *(uogólnienia liczb zespolonych)*,

Inne rodzaje liczb:

- kwaterniony $\mathbb{H}$ i oktawy Cayleya $\mathbb{O}$ *(uogólnienia liczb zespolonych)*,
- liczby kardynalne *(mierzą ilość elementów w zbiorze)*,

Inne rodzaje liczb:

- kwaterniony $\mathbb{H}$ i oktawy Cayleya $\mathbb{O}$ *(uogólnienia liczb zespolonych)*,
- liczby kardynalne *(mierzą ilość elementów w zbiorze)*,
- liczby porządkowe *(wskazują porządek w zbiorze uporządkowanym)*,

Inne rodzaje liczb:

- kwaterniony $\mathbb{H}$ i oktawy Cayleya $\mathbb{O}$ *(uogólnienia liczb zespolonych)*,
- liczby kardynalne *(mierzą ilość elementów w zbiorze)*,
- liczby porządkowe *(wskazują porządek w zbiorze uporządkowanym)*,
- liczby p-adyczne *(przydatne w Teorii Liczb)*,

Inne rodzaje liczb:

- kwaterniony $\mathbb{H}$ i oktawy Cayleya $\mathbb{O}$ *(uogólnienia liczb zespolonych)*,
- liczby kardynalne *(mierzą ilość elementów w zbiorze)*,
- liczby porządkowe *(wskazują porządek w zbiorze uporządkowanym)*,
- liczby p-adyczne *(przydatne w Teorii Liczb)*,
- ...

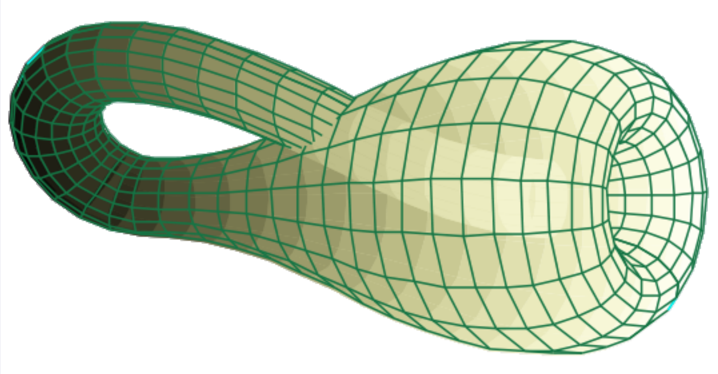
2. Figura

„Nikt, kto nie zna geometrii, niech tu nie wchodzi”

– napis nad wejściem do Akademii Platona

- topologia,

- topologia,



- geometria algebraiczna:
  badanie m.in. krzywych (zbiorów zadanych równaniami wielomianowymi, np. $y^2 = x^3 + x$)

- geometria algebraiczna:
  badanie m.in. krzywych (zbiorów zadanych równaniami wielomianowymi, np. $y^2 = x^3 + x$)

Wielkie Twierdzenie Fermata

Dla $n \geqslant 3$ nie istnieją całkowite rozwiązania równania $x^n + y^n = z^n$, w których wszystkie trzy liczby są niezerowe.

- geometria algebraiczna:
  badanie m.in. krzywych (zbiorów zadanych równaniami wielomianowymi, np. $y^2 = x^3 + x$)

Wielkie Twierdzenie Fermata

Dla $n \geqslant 3$ nie istnieją całkowite rozwiązania równania $x^n + y^n = z^n$, w których wszystkie trzy liczby są niezerowe.

„...odkryłem naprawdę zadziwiający dowód tego faktu.
Margines jest na to za mały.... ”
— Pierre de Fermat (1601 - 1665)

- geometria algebraiczna:
  badanie m.in. krzywych (zbiorów zadanych równaniami wielomianowymi, np. $y^2 = x^3 + x$)

Wielkie Twierdzenie Fermata

Dla $n \geqslant 3$ nie istnieją całkowite rozwiązania równania $x^n + y^n = z^n$, w których wszystkie trzy liczby są niezerowe.

„...odkryłem naprawdę zadziwiający dowód tego faktu.
Margines jest na to za mały.... ”
— Pierre de Fermat (1601 - 1665)

Dowód: Andrew Wiles, 1995

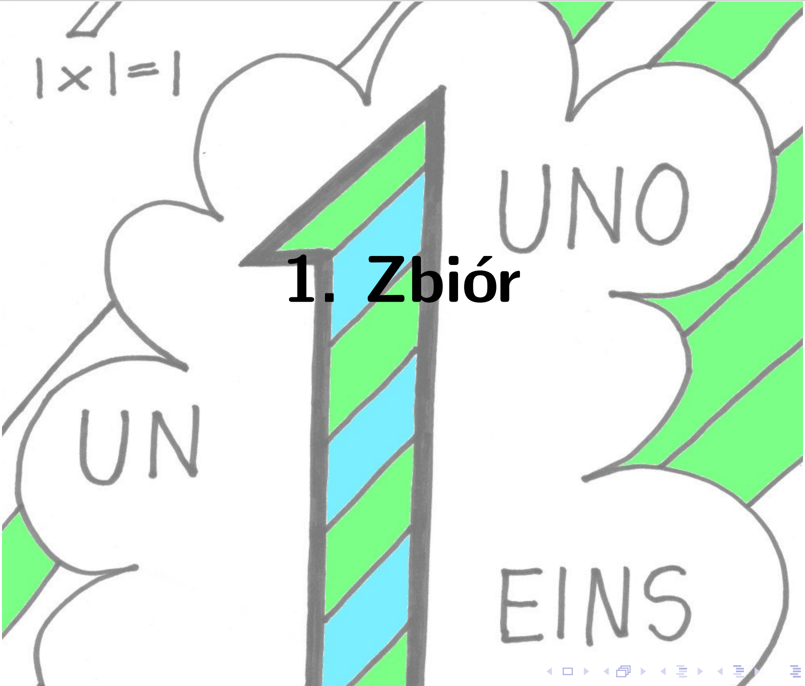
- geometria algebraiczna:
  badanie m.in. krzywych (zbiorów zadanych równaniami wielomianowymi, np. $y^2 = x^3 + x$)

Wielkie Twierdzenie Fermata

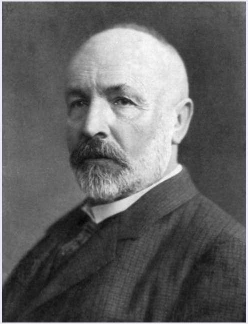
Dla $n \geqslant 3$ nie istnieją całkowite rozwiązania równania $x^n + y^n = z^n$, w których wszystkie trzy liczby są niezerowe.

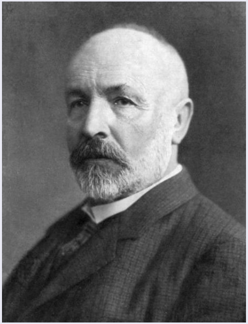
„...odkryłem naprawdę zadziwiający dowód tego faktu.
Margines jest na to za mały.... ”
— Pierre de Fermat (1601 - 1665)

Dowód: Andrew Wiles, 1995
Dowód ma 150 stron, korzysta z teorii krzywych eliptycznych, form i reprezentacji modularnych.

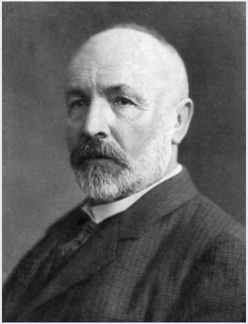


1. Zbiór





Georg Cantor (1845 - 1918) – niemiecki matematyk, twórca nowoczesnej teorii mnogości



Georg Cantor (1845 - 1918) – niemiecki matematyk, twórca nowoczesnej teorii mnogości

„...już nikt nie wypędzi nas z raju, który Cantor nam stworzył...”

–David Hilbert (1862 - 1943)

Wielkopolska Liga Matematyczna

Wielkopolska
Liga
Matematyczna

styczeń – marzec

strona internetowa: wlm.wmi.amu.edu.pl

Inne polecane strony:

Inne polecane strony:

- **http://pfm.wmi.amu.edu.pl** – Poznańska Fundacja Matematyczna,

Inne polecane strony:

- **http://pfm.wmi.amu.edu.pl** – Poznańska Fundacja Matematyczna,
- **http://jgarnek.faculty.wmi.amu.edu.pl/prezentacje**

Inne polecane strony:

- **http://pfm.wmi.amu.edu.pl** – Poznańska Fundacja Matematyczna,
- **http://jgarnek.faculty.wmi.amu.edu.pl/prezentacje**

- jgarnek@wp.pl lub jgarnek@amu.edu.pl

Polecane książki:

Polecane książki:

- Courrant, Robbins, „Co to jest matematyka”,

Polecane książki:

- Courrant, Robbins, „Co to jest matematyka”,
- Paweł Strzelecki, „Matematyka współczesna dla myślących laików”,

Polecane książki:

- Courrant, Robbins, „Co to jest matematyka",
- Paweł Strzelecki, „Matematyka współczesna dla myślących laików",
- Ian Stewart, „Oswajanie nieskończoności",

Polecane książki:

- Courrant, Robbins, „Co to jest matematyka",
- Paweł Strzelecki, „Matematyka współczesna dla myślących laików",
- Ian Stewart, „Oswajanie nieskończoności",
- Aigner, Ziegler, „Dowody z Księgi"