

Krzywe, ich symetrie i kohomologie

Jędrzej Garnek

UAM Poznań

Toruń, 25.06.2025

Krzywe algebraiczne

Obiektem moich badań są **krzywe algebraiczne**, tzn. jednowymiarowe obiekty zadane przez równania wielomianowe, np.

$$y^2 = x^3 - x.$$

Krzywe algebraiczne

Obiektem moich badań są **krzywe algebraiczne**, tzn. jednowymiarowe obiekty zadane przez równania wielomianowe, np.

$$y^2 = x^3 - x.$$

Będziemy rozważali krzywe:

Krzywe algebraiczne

Obiektem moich badań są **krzywe algebraiczne**, tzn. jednowymiarowe obiekty zadane przez równania wielomianowe, np.

$$y^2 = x^3 - x.$$

Będziemy rozważali krzywe:

- ▶ gładkie
(= bez „ostrzy” i samoprzecięć)

Krzywe algebraiczne

Obiektem moich badań są **krzywe algebraiczne**, tzn. jednowymiarowe obiekty zadane przez równania wielomianowe, np.

$$y^2 = x^3 - x.$$

Będziemy rozważali krzywe:

- ▶ gładkie
(= bez „ostrzy” i samoprzecięć)
- ▶ rzutowe
(= krzywe „zwarte”)

Krzywe algebraiczne

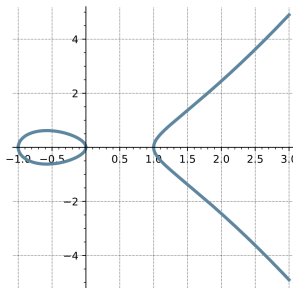
Obiektem moich badań są **krzywe algebraiczne**, tzn. jednowymiarowe obiekty zadane przez równania wielomianowe, np.

$$y^2 = x^3 - x.$$

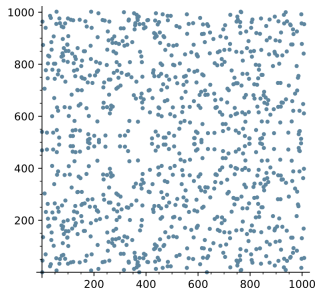
Będziemy rozważali krzywe:

- ▶ gładkie
(= bez „ostrzy” i samoprzecięć)
- ▶ rzutowe
(= krzywe „zwarte”)
- ▶ nad ciałami charakterystyki p , np. $\mathbb{F}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$
(= „modulo liczba pierwsza”)

Krzywe w charakterystyce p



“Klasyczna” krzywa $y^2 = x^3 - x$



Krzywa $y^2 = x^3 - x$ nad $\mathbb{F}_{1009}$

Krzywe nad $\mathbb{F}_p$ mają liczne zastosowania w kryptografii:
zarówno przy szyfrowaniu i zapewnianiu elektronicznych podpisów,
jak i przy konstrukcji kodów poprawiających błędy.

Kohomologie

Rozważmy dwa niezmienniki krzywych:

- ▶ **kohomologia de Rhama:** $H_{dR}^1(X)$,
- ▶ **kohomologia Hodge'a:** $H_{Hdg}^1(X)$.

Obydwa niezmienniki są pewnymi przestrzeniami wektorowymi.

Kohomologie

Rozważmy dwa niezmienniki krzywych:

- ▶ **kohomologia de Rhama:** $H_{dR}^1(X)$,
- ▶ **kohomologia Hodge'a:** $H_{Hdg}^1(X)$.

Obydwa niezmienniki są pewnymi przestrzeniami wektorowymi.

Definicja

$$H_{Hdg}^1(X) := H^0(X, \Omega_X) \oplus H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

$$H_{dR}^1(X) := \mathbb{H}^1(X, \Omega_X^\bullet)$$

Kohomologie

Rozważmy dwa niezmienniki krzywych:

- ▶ **kohomologia de Rhama:** $H_{dR}^1(X)$,
- ▶ **kohomologia Hodge'a:** $H_{Hdg}^1(X)$.

Obydwa niezmienniki są pewnymi przestrzeniami wektorowymi.

Definicja

$$H_{Hdg}^1(X) := H^0(X, \Omega_X) \oplus H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

$$H_{dR}^1(X) := \mathbb{H}^1(X, \Omega_X^\bullet)$$

$$H^1\left(\underbrace{\text{g dziur}}\right) = \mathbb{C}^{2g}$$

Kohomologie

$G \curvearrowright$

X – krzywa algebraiczna



$G \curvearrowright$

$H^1_{Hdg}(X), H^1_{dR}(X)$ – niezmienniki krzywej

Kohomologie

$G \curvearrowright$

X – krzywa algebraiczna



$G \curvearrowright$

$H_{Hdg}^1(X), H_{dR}^1(X)$ – niezmienniki krzywej

Problem badawczy

Zrozumieć strukturę kohomologii

$H_{dR}^1(X)$ oraz $H_{Hdg}^1(X)$

jako G -modułów.

Kohomologie

$G \curvearrowright$

X – krzywa algebraiczna



$G \curvearrowright$

$H_{dR}^1(X), H_{dR}^1(X)$ – niezmienniki krzywej

Problem badawczy

Zrozumieć strukturę kohomologii

$H_{dR}^1(X)$ oraz $H_{Hdg}^1(X)$

jako G -modułów.

W charakterystyce 0 problem jest całkowicie rozwiązany
(formuła Chevalleya–Weila, [7], 1934 r.)

Co czyni ten problem trudnym?

Dla wielu klas obiektów (grup, algebr, koalgebr, kołczanów)
zachodzi następująca dychotomia – obiekt jest:

Co czyni ten problem trudnym?

Dla wielu klas obiektów (grup, algebr, koalgebr, kołczanów) zachodzi następująca dychotomia – obiekt jest:

- ▶ albo **oswojony**, tzn. nierozkładalne reprezentacje w każdym wymiarze tworzą skończenie wiele rodzin parametryzowanych jedną zmienną,

Co czyni ten problem trudnym?

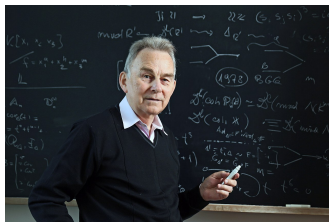
Dla wielu klas obiektów (grup, algebr, koalgebr, kołczanów) zachodzi następująca dychotomia – obiekt jest:

- ▶ albo **oswojony**, tzn. nierozkładalne reprezentacje w każdym wymiarze tworzą skończenie wiele rodzin parametryzowanych jedną zmienną,
- ▶ albo **dziki**, tzn. jego reprezentacje są „tak skomplikowane”, jak dowolne pary macierzy nad ciałem, zatem ich klasyfikacja jest niemożliwa.

Co czyni ten problem trudnym?

Dla wielu klas obiektów (grup, algebr, koalgebr, kołczanów) zachodzi następująca dychotomia – obiekt jest:

- ▶ albo **oswojony**, tzn. nierozkładalne reprezentacje w każdym wymiarze tworzą skończenie wiele rodzin parametryzowanych jedną zmienną,
- ▶ albo **dziki**, tzn. jego reprezentacje są „tak skomplikowane”, jak dowolne pary macierzy nad ciałem, zatem ich klasyfikacja jest niemożliwa.



Zagadnieniem tym zajmował się m.in. prof. Daniel Simson, badając tą dychotomię m.in. w kontekście koalgebr oraz ich zastosowań w teorii reprezentacji.

Co czyni ten problem trudnym?

Dla wielu klas obiektów (grup, algebr, koalgebr, kołczanów) zachodzi następująca dychotomia – obiekt jest:

- ▶ albo **oswojony**, tzn. nierozkładalne reprezentacje w każdym wymiarze tworzą skończenie wiele rodzin parametryzowanych jedną zmienną,
- ▶ albo **dziki**, tzn. jego reprezentacje są „tak skomplikowane”, jak dowolne pary macierzy nad ciałem, zatem ich klasyfikacja jest niemożliwa.

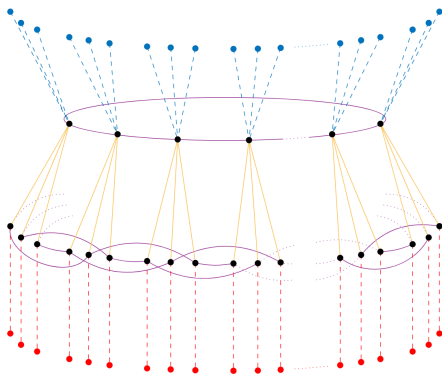
Teoria reprezentacji grupy G nad ciałem charakterystyki p jest:

- ▶ oswojona wtw. gdy p -grupa Sylowa G jest cykliczna,
- ▶ dzika w przeciwnym wypadku.

Motywacje

Motywacje

1. Klasyfikacja morfizmów między krzywymi.



Graf izogenii krzywych eliptycznych wykorzystywany w algorytmie kryptograficznym CSIDH.

Motywacje

1. Klasyfikacja morfizmów między krzywymi.
2. Podnoszenie działań na krzywych do charakterystyki 0.

Pytanie

Niech X będzie krzywą nad $\mathbb{F}_p$ z działaniem grupy G .
Czy X można podnieść do krzywej nad $\mathbb{Z}$ z działaniem grupy G ?

Twierdzenie (Kontogeorgis, Terezakis, [6]):

$G \curvearrowright X$ można podnieść wtw. gdy istnieje podniesienie
 $G \curvearrowright H^0(X, \Omega_X)$ spełniające pewien warunek.

Motywacje

1. Klasyfikacja morfizmów między krzywymi.
2. Podnoszenie działań na krzywych do charakterystyki 0.
3. Jak wyglądają reprezentacje grupy G uzyskane z kohomologii krzywych?

Czy pełen opis kohomologii krzywych jest *wykonalnym* problemem?

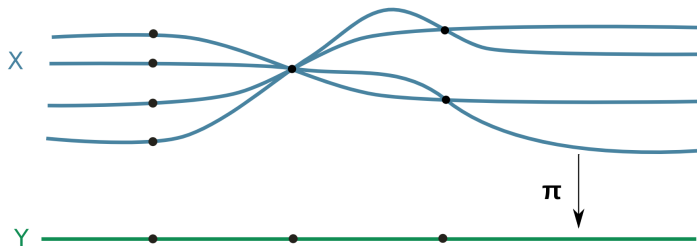
Motywacje

1. Klasyfikacja morfizmów między krzywymi.
2. Podnoszenie działań na krzywych do charakterystyki 0.
3. Jak wyglądają reprezentacje grupy G uzyskane z kohomologii krzywych?
Czy pełen opis kohomologii krzywych jest *wykonalnym* problemem?
4. $H_{dR}^1(X) \rightsquigarrow$ informacja o p -torsji Jakobianów krzywych.

Nakrycia

Rozważanie krzywej X wraz z działaniem grupy G jest równoważne z rozważaniem **nakrycia krzywych** $\pi : X \rightarrow Y$.

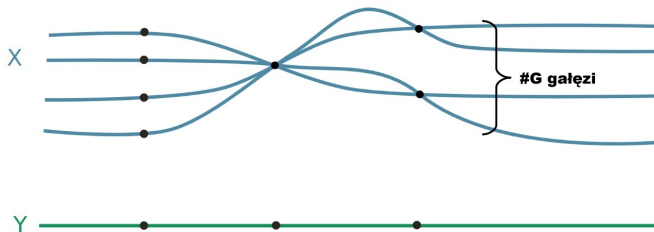
Krzywa $Y := X/G$ jest wtedy przestrzenią orbit działania.



Nakrycia

Rozważanie krzywej X wraz z działaniem grupy G jest równoważne z rozważaniem **nakrycia krzywych** $\pi : X \rightarrow Y$.

Na obrazku widzimy przypadek $\#G = 4$.

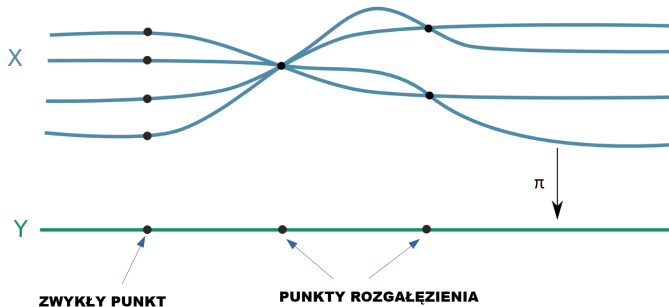


Nakrycia

Rozważanie krzywej X wraz z działaniem grupy G jest równoważne z rozważaniem **nakrycia krzywych** $\pi : X \rightarrow Y$.

Zauważmy, że:

- ▶ nad prawie każdym punktem Y są $\#G$ punkty X ,
- ▶ pozostałe punkty to tzw. **punkty rozgałęzienia**.



Nakrycia Artina–Schreiera

Fakt

Każde $\mathbb{Z}/p$ -nakrycie prostej rzutowej $\mathbb{P}^1$ w charakterystyce p jest postaci:

$$X : y^p - y = h(x),$$

gdzie działanie $\mathbb{Z}/p$ jest zadane przez $(x, y) \mapsto (x, y + 1)$.

Nakrycia Artina–Schreiera

Fakt

Każde $\mathbb{Z}/p$ -nakrycie prostej rzutowej $\mathbb{P}^1$ w charakterystyce p jest postaci:

$$X : y^p - y = h(x),$$

gdzie działanie $\mathbb{Z}/p$ jest zadane przez $(x, y) \mapsto (x, y + 1)$.

Punkty rozgałęzienia $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ odpowiadają biegunom funkcji h^*
* (jeżeli rzędy biegunów h są niepodzielne przez p)

Nakrycia Artina–Schreiera

Fakt

Każde $\mathbb{Z}/p$ -nakrycie prostej rzutowej $\mathbb{P}^1$ w charakterystyce p jest postaci:

$$X : y^p - y = h(x),$$

gdzie działanie $\mathbb{Z}/p$ jest zadane przez $(x, y) \mapsto (x, y + 1)$.

Punkty rozgałęzienia $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ odpowiadają biegunom funkcji h^*
* (jeżeli rzędy biegunów h są niepodzielne przez p)

Wniosek

W charakterystyce p prosta afiniczna $\mathbb{A}^1$ jest „dziurawa”:

Nakrycia Artina–Schreiera

Fakt

Każde $\mathbb{Z}/p$ -nakrycie prostej rzutowej $\mathbb{P}^1$ w charakterystyce p jest postaci:

$$X : y^p - y = h(x),$$

gdzie działanie $\mathbb{Z}/p$ jest zadane przez $(x, y) \mapsto (x, y + 1)$.

Punkty rozgałęzienia $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ odpowiadają biegunom funkcji h^*
* (jeżeli rzędy biegunów h są niepodzielne przez p)

Wniosek

W charakterystyce p prosta afiniczna $\mathbb{A}^1$ jest „dziurawa”:

$$\pi_1(\mathbb{A}^1) \neq 0!$$

Rozkład na część globalną i lokalną

[JG, [3]] Jeśli grupa G działa na krzywej X , to:

$$\dim_k H_{dR}^1(X)^G - \dim_k H_{Hdg}^1(X)^G = \sum_{P \in X(k)} \delta_P.$$

Rozkład na część globalną i lokalną

[JG, [3]] Jeśli grupa G działa na krzywej X , to:

$$\dim_k H_{dR}^1(X)^G - \dim_k H_{Hdg}^1(X)^G = \sum_{P \in X(k)} \delta_P.$$

Można zatem przypuszczać, że jako $k[G]$ -moduły

$$H_{dR}^1(X) \cong \text{część globalna} \oplus \text{części lokalne},$$

$$H_{Hdg}^1(X) \cong \text{część globalna} \oplus \text{części lokalne},$$

gdzie:

Rozkład na część globalną i lokalną

[JG, [3]] Jeśli grupa G działa na krzywej X , to:

$$\dim_k H_{dR}^1(X)^G - \dim_k H_{Hdg}^1(X)^G = \sum_{P \in X(k)} \delta_P.$$

Można zatem przypuszczać, że jako $k[G]$ -moduły

$$H_{dR}^1(X) \cong \text{część globalna} \oplus \text{części lokalne},$$

$$H_{Hdg}^1(X) \cong \text{część globalna} \oplus \text{części lokalne},$$

gdzie:

- ▶ części globalne zależą tylko od „kształtu” nakrycia (stabilizatorów i genusu krzywej X/G) i są takie same dla obu kohomologii,

Rozkład na część globalną i lokalną

[JG, [3]] Jeśli grupa G działa na krzywej X , to:

$$\dim_k H_{dR}^1(X)^G - \dim_k H_{Hdg}^1(X)^G = \sum_{P \in X(k)} \delta_P.$$

Można zatem przypuszczać, że jako $k[G]$ -moduły

$$H_{dR}^1(X) \cong \text{część globalna} \oplus \text{części lokalne},$$

$$H_{Hdg}^1(X) \cong \text{część globalna} \oplus \text{części lokalne},$$

gdzie:

- ▶ części globalne zależą tylko od „kształtu” nakrycia (stabilizatorów i genusu krzywej X/G) i są takie same dla obu kohomologii,
- ▶ części lokalne zależą tylko od „ininitezimalnego otoczenia” punktów rozgałęzienia.

Rozkład na części globalne i lokalne

Główna teza prac [1] oraz [2] dotyczy rozkładu $H_{dR}^1(X)$ oraz $H_{Hdg}^1(X)$ na pewne części lokalne i globalne. Wytłumaczmy, w jaki sposób interpretować części lokalne na przykładzie konkretnego $\mathbb{V}_4$ -nakrycia w charakterystyce 2, gdzie:

$$\mathbb{V}_4 := \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2.$$

Przykład – nakrycia Kleina

Przykład

$\mathbb{V}_4$ -nakrycie $\mathbb{P}^1$ nad $\overline{\mathbb{F}}_2$:

$$X : y_0^2 + y_0 = x^3 + \frac{1}{(x-1)^7}, \quad y_1^2 + y_1 = x^5 + \frac{1}{x^5}.$$

Punkty rozgałęzienia π to 0, 1, ∞ .

Przykład – nakrycia Kleina

Przykład

$\mathbb{V}_4$ -nakrycie $\mathbb{P}^1$ nad $\overline{\mathbb{F}}_2$:

$$X : y_0^2 + y_0 = x^3 + \frac{1}{(x-1)^7}, \quad y_1^2 + y_1 = x^5 + \frac{1}{x^5}.$$

Punkty rozgałęzienia π to 0, 1, ∞ .

Będziemy pracowali "w infinitezymalnym otoczeniu punktu 0".

Każda funkcja regularna w 0 jest postaci $s^2 + s$ dla $s \in \overline{\mathbb{F}}_2[[x]]$.

Możemy zatem dodać do zmiennych **pewien szereg potęgowy**, uzyskując:

$$y_0^2 + y_0 = x^3 + \frac{1}{(x-1)^7}, \quad y_1^2 + y_1 = x^5 + \frac{1}{x^5}.$$

Przykład – nakrycia Kleina

Przykład

$\mathbb{V}_4$ -nakrycie $\mathbb{P}^1$ nad $\overline{\mathbb{F}}_2$:

$$X : y_0^2 + y_0 = x^3 + \frac{1}{(x-1)^7}, \quad y_1^2 + y_1 = x^5 + \frac{1}{x^5}.$$

Punkty rozgałęzienia π to 0, 1, ∞ .

Będziemy pracowali "w infinitesimalnym otoczeniu punktu 0".

Każda funkcja regularna w 0 jest postaci $s^2 + s$ dla $s \in \overline{\mathbb{F}}_2[[x]]$.

Możemy zatem dodać do zmiennych **pewien szereg potęgowy**,
uzyskując:

$$\tilde{y}_0^2 + \tilde{y}_0 = 0 \cancel{x^3 + \frac{1}{(x-1)^7}}, \quad y_1^2 + y_1 = x^5 + \frac{1}{x^5}.$$

$$\tilde{y}_0 := y_0 + s, \quad s^2 + s = x^3 + \frac{1}{(x-1)^7}$$

Przykład – nakrycia Kleina

Przykład

$\mathbb{V}_4$ -nakrycie $\mathbb{P}^1$ nad $\overline{\mathbb{F}}_2$:

$$X : y_0^2 + y_0 = x^3 + \frac{1}{(x-1)^7}, \quad y_1^2 + y_1 = x^5 + \frac{1}{x^5}.$$

Punkty rozgałęzienia π to 0, 1, ∞ .

Będziemy pracowali "w infinitezymalnym otoczeniu punktu 0".

Każda funkcja regularna w 0 jest postaci $s^2 + s$ dla $s \in \overline{\mathbb{F}}_2[[x]]$.

Możemy zatem dodać do zmiennych **pewien szereg potęgowy**, uzyskując:

$$\tilde{y}_0^2 + \tilde{y}_0 = 0 \cancel{x^3 + \frac{1}{(x-1)^7}}, \quad \tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_1 = \cancel{x^5 + \frac{1}{x^5}}.$$

Przykład – nakrycia Kleina

Przykład

$\mathbb{V}_4$ -nakrycie $\mathbb{P}^1$ nad $\overline{\mathbb{F}}_2$:

$$X : y_0^2 + y_0 = x^3 + \frac{1}{(x-1)^7}, \quad y_1^2 + y_1 = x^5 + \frac{1}{x^5}.$$

Punkty rozgałęzienia π to 0, 1, ∞ .

Będziemy pracowali "w infinitezymalnym otoczeniu punktu 0".

Każda funkcja regularna w 0 jest postaci $s^2 + s$ dla $s \in \overline{\mathbb{F}}_2[[x]]$.

Możemy zatem dodać do zmiennych **pewien szereg potęgowy**, uzyskując:

$$\tilde{y}_0^2 + \tilde{y}_0 = 0 \cancel{x^3 + \frac{1}{(x-1)^7}}, \quad \tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_1 = \cancel{x^5 + \frac{1}{x^5}}.$$

Te równania określają krzywą $X_0/\overline{\mathbb{F}}_2$:

$$X_0 : y_0^2 + y_0 = 0, \quad y_1^2 + y_1 = \frac{1}{x^5}.$$

Przykład – nakrycia Kleina

Przykład

$\mathbb{V}_4$ -nakrycie $\mathbb{P}^1$ nad $\overline{\mathbb{F}}_2$:

$$X : y_0^2 + y_0 = x^3 + \frac{1}{(x-1)^7}, \quad y_1^2 + y_1 = x^5 + \frac{1}{x^5}.$$

Podobnie konstruujemy krzywe dla 1 oraz ∞ :

$$X_0 : \tilde{y}_0^2 + \tilde{y}_0 = 0, \quad \tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_1 = \frac{1}{x^5},$$

$$X_1 : y_0^2 + y_0 = \frac{1}{(x-1)^7}, \quad y_1^2 + y_1 = 0,$$

$$X_\infty : y_0^2 + y_0 = x^3, \quad y_1^2 + y_1 = x^5.$$

Krzywe X_0 , X_1 , X_∞ są $\mathbb{V}_4$ -nakryciami $\mathbb{P}^1$. Intuicyjnie, przybliżają one $\pi : X \rightarrow Y$ wokół odpowiednio 0 , 1 oraz ∞ .

Przykład – nakrycia Kleina

Przykład

$\mathbb{V}_4$ -nakrycie $\mathbb{P}^1$ nad $\overline{\mathbb{F}}_2$:

$$X : y_0^2 + y_0 = x^3 + \frac{1}{(x-1)^7}, \quad y_1^2 + y_1 = x^5 + \frac{1}{x^5}.$$

Obliczając ręcznie bazy kohomologii X_0 , X_1 , X_∞ oraz X można pokazać, że jako $\overline{\mathbb{F}}_2[\mathbb{V}_4]$ -moduły:

$$H_{dR}^1(X_0) \cong N_{2,0}^4$$

$$H_{dR}^1(X_1) \cong N_{2,1}^6$$

$$H_{dR}^1(X_\infty) \cong N_{2,0}^2 \oplus M_{3,1} \oplus M_{3,2}$$

$$H_{dR}^1(X) \cong N_{2,0}^7 \oplus N_{2,1}^7 \oplus M_{3,1} \oplus M_{3,2}$$

gdzie $N_{2,i}$, $M_{3,i}$ – nierozkładalne $\overline{\mathbb{F}}_2[\mathbb{V}_4]$ -moduły wymiarów 2, 3.

Przykład – nakrycia Kleina

Przykład

$\mathbb{V}_4$ -nakrycie $\mathbb{P}^1$ nad $\overline{\mathbb{F}}_2$:

$$X : y_0^2 + y_0 = x^3 + \frac{1}{(x-1)^7}, \quad y_1^2 + y_1 = x^5 + \frac{1}{x^5}.$$

Obliczając ręcznie bazy kohomologii X_0 , X_1 , X_∞ oraz X można pokazać, że jako $\overline{\mathbb{F}}_2[\mathbb{V}_4]$ -moduły:

$$H_{dR}^1(X_0) \cong N_{2,0}^4$$

$$H_{dR}^1(X_1) \cong N_{2,1}^6$$

$$H_{dR}^1(X_\infty) \cong N_{2,0}^2 \oplus M_{3,1} \oplus M_{3,2}$$

$$H_{dR}^1(X) \cong N_{2,0} \oplus N_{2,1} \oplus N_{2,0}^4 \oplus N_{2,1}^6 \oplus N_{2,0}^2 \oplus M_{3,1} \oplus M_{3,2}$$

gdzie $N_{2,i}$, $M_{3,i}$ – nierozkładalne $\overline{\mathbb{F}}_2[\mathbb{V}_4]$ -moduły wymiarów 2, 3.

Nakrycia HKG

G – p -grupa, $\pi : X \rightarrow Y$ – G -nakrycie w charakterystyce p

Definicja

Nakrycie Harbatera–Katza–Gabbera związane z X w punkcie $Q \in Y(k)$ to G -nakrycie $X_Q \rightarrow \mathbb{P}^1$ rozgałęzione tylko nad ∞ i takie, że

$$\hat{\mathcal{O}}_{X,Q} \cong \hat{\mathcal{O}}_{X_Q,\infty} \quad \text{z działaniem } G.$$

Nakrycia HKG

G – p -grupa, $\pi : X \rightarrow Y$ – G -nakrycie w charakterystyce p

Definicja

Nakrycie Harbatera–Katza–Gabbera związane z X w punkcie $Q \in Y(k)$ to G -nakrycie $X_Q \rightarrow \mathbb{P}^1$ rozgałęzione tylko nad ∞ i takie, że

$$\hat{\mathcal{O}}_{X,Q} \cong \hat{\mathcal{O}}_{X_Q,\infty} \quad \text{z działaniem } G.$$

Nakrycia HKG są kluczowym narzędziem przy badaniu lokalnych działań i teorii deformacji krzywych z działaniem grupy.

W szczególności, odgrywają kluczową rolę w dowodzie hipotezy Oorta.

Nakrycia HKG

G – p -grupa, $\pi : X \rightarrow Y$ – G -nakrycie w charakterystyce p

Definicja

Nakrycie Harbatera–Katza–Gabbera związane z X w punkcie $Q \in Y(k)$ to G -nakrycie $X_Q \rightarrow \mathbb{P}^1$ rozgałęzione tylko nad ∞ i takie, że

$$\hat{\mathcal{O}}_{X,Q} \cong \hat{\mathcal{O}}_{X_Q,\infty} \quad \text{z działaniem } G.$$

Przykład

Jeżeli $Q \in Y(k)$ nie jest punktem rozgałęzienia, to

$$X_Q = \bigsqcup_G \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1.$$

Główny wynik

Niech:

$$I_{X/Y} := \ker \left(\sum : \bigoplus_{\substack{Q - \text{pkt} \\ \text{rozg.}}} I_{G, G_Q} \rightarrow k[G] \right),$$

gdzie I_G oznacza ideał augmentacji, zaś $I_{G,H} := \ker(I_G \rightarrow I_{G/H})$.

Główny wynik

Niech:

$$I_{X/Y} := \ker \left(\sum : \bigoplus_{\substack{Q - \text{pkt} \\ \text{rozg.}}} I_{G, G_Q} \rightarrow k[G] \right),$$

gdzie I_G oznacza ideał augmentacji, zaś $I_{G,H} := \ker(I_G \rightarrow I_{G/H})$.

Twierdzenie (JG, [1], [2])

Dla **generycznej** krzywej X z działaniem p -grupy G w charakterystyce p :

$$H_{dR}^1(X) \cong k[G]^{2g_Y} \oplus I_{X/Y} \oplus I_{X/Y}^{\vee} \oplus \bigoplus_{\substack{Q - \text{pkt} \\ \text{rozg.}}} H_{dR}^1(X_Q),$$

$$H_{Hdg}^1(X) \cong \underbrace{k[G]^{2g_Y} \oplus I_{X/Y} \oplus I_{X/Y}^{\vee}}_{\text{część globalna}} \oplus \bigoplus_{\substack{Q - \text{pkt} \\ \text{rozg.}}} \underbrace{H_{Hdg}^1(X_Q)}_{\text{części lokalne}}.$$

Zastosowanie nr 1 – porównanie H_{dR}^1 oraz H_{Hdg}^1

Wniosek (JG, 2023)

Dla generycznej krzywej X z działaniem grupy G , następujące warunki są równoważne

- ▶ $H_{dR}^1(X) \cong H_{Hdg}^1(X)$ jako $k[G]$ -moduły,
- ▶ działanie G jest słabo rozgałęzione, tzn.
 $G_{P,2} = 0 \quad \forall P \in X(k).$

Dowód:

Zastosowanie nr 1 – porównanie H_{dR}^1 oraz H_{Hdg}^1

Wniosek (JG, 2023)

Dla generycznej krzywej X z działaniem grupy G , następujące warunki są równoważne

- ▶ $H_{dR}^1(X) \cong H_{Hdg}^1(X)$ jako $k[G]$ -moduły,
- ▶ działanie G jest słabo rozgałęzione, tzn.
 $G_{P,2} = 0 \quad \forall P \in X(k).$

Dowód:

($\Rightarrow$) Obliczamy G -niezmienniki.

Zastosowanie nr 1 – porównanie H_{dR}^1 oraz H_{Hdg}^1

Wniosek (JG, 2023)

Dla generycznej krzywej X z działaniem grupy G , następujące warunki są równoważne

- ▶ $H_{dR}^1(X) \cong H_{Hdg}^1(X)$ jako $k[G]$ -moduły,
- ▶ działanie G jest słabo rozgałęzione, tzn.
 $G_{P,2} = 0 \quad \forall P \in X(k).$

Dowód:

($\Rightarrow$) Obliczamy G -niezmienniki.

($\Leftarrow$) Jeżeli $G_{P,2} = 0$, to $X_Q = \bigsqcup_G \mathbb{P}^1$ oraz

$$H_{dR}^1(X_Q) = H_{Hdg}^1(X_Q) = 0.$$

Zastosowanie nr 2 – kohomologie $\mathbb{Z}/p$ - i $\mathbb{V}_4$ -nakryć

Wniosek (JG, 2022)

Dla „ładnej” krzywej z działaniem $\mathbb{Z}/p$:

$$H_{dR}^1(X) \cong k[G]^{2g_Y} \oplus I_G^r.$$

Dowód:

Zastosowanie nr 2 – kohomologie $\mathbb{Z}/p$ - i $\mathbb{V}_4$ -nakryć

Wniosek (JG, 2022)

Dla „ładnej” krzywej z działaniem $\mathbb{Z}/p$:

$$H_{dR}^1(X) \cong k[G]^{2g_Y} \oplus I_G^r.$$

Dowód: obliczenie kohomologii HKG-nakryć dla $\mathbb{Z}/p$:

$$y^p - y = x^m.$$

Zastosowanie nr 2 – kohomologie $\mathbb{Z}/p$ - i $\mathbb{V}_4$ -nakryć

Wniosek (JG, 2022)

Dla „ładnej” krzywej z działaniem $\mathbb{Z}/p$:

$$H_{dR}^1(X) \cong k[G]^{2g_Y} \oplus I_G^r.$$

Dowód: obliczenie kohomologii HKG-nakryć dla $\mathbb{Z}/p$:

$$y^p - y = x^m.$$

Wniosek (JG, 2023)

Opis kohomologii de Rham $\mathbb{V}_4$ nakryć w charakterystyce 2.
(są one złożone z 7 „cegiełek”)

Zastosowanie nr 3 – „cegiełki” kohomologii

Pytanie: Z jakich „cegielek” złożone są kohomologie krzywych?

Zastosowanie nr 3 – „cegiełki” kohomologii

Pytanie: Z jakich „cegiełek” złożone są kohomologie krzywych?

Wniosek (JG, [4], 2024)

Niech $p > 2$. Ustalmy grupę G , której p -podgrupa Sylowa jest cykliczna. Istnieje nieskończenie wiele klas izomorfizmu nierozkładalnych składników prostych, które mogą się pojawić w kohomologii Hodge'a/de Rhama G -nakrycia w charakterystyce p .

Zastosowanie nr 3 – „cegielełki” kohomologii

Pytanie: Z jakich „cegielełek” złożone są kohomologie krzywych?

Wniosek (JG, [4], 2024)

Niech $p > 2$. Ustalmy grupę G , której p -podgrupa Sylowa jest cykliczna. Istnieje nieskończenie wiele klas izomorfizmu nierozkładalnych składników prostych, które mogą się pojawiać w kohomologii Hodge'a/de Rhamów G -nakrycia w charakterystyce p .

Dowód: kohomologie HKG-nakryć dla $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$ oraz Twierdzenie.

Twierdzenie (w przygotowaniu)

Dla dowolnej krzywej X z działaniem p -grupy G
w charakterystyce p :

$$H_{Hdg}^1(X) \cong k[G]^{\oplus 2(g_Y - d)} \oplus I_{X/Y} \oplus I_{X/Y}^\vee \oplus \bigoplus_Q H_{dR}^1(X_Q),$$

gdzie:

Twierdzenie (w przygotowaniu)

Dla dowolnej krzywej X z działaniem p -grupy G w charakterystyce p :

$$H_{Hdg}^1(X) \cong k[G]^{\oplus 2(g_Y - d)} \oplus I_{X/Y} \oplus I_{X/Y}^\vee \oplus \bigoplus_Q H_{dR}^1(X_Q),$$

gdzie:

$$\blacktriangleright I_{X/Y} := \ker \left(\sum \oplus \mu : \bigoplus_Q I_{G, G_Q} \oplus k[G]^d \rightarrow I_G \right),$$

Twierdzenie (w przygotowaniu)

Dla dowolnej krzywej X z działaniem p -grupy G w charakterystyce p :

$$H_{Hdg}^1(X) \cong k[G]^{\oplus 2(g_Y - d)} \oplus I_{X/Y} \oplus I_{X/Y}^\vee \oplus \bigoplus_Q H_{dR}^1(X_Q),$$

gdzie:

- ▶ $I_{X/Y} := \ker \left(\sum \oplus \mu : \bigoplus_Q I_{G, G_Q} \oplus k[G]^d \rightarrow I_G \right),$
- ▶ $G_{ram} := \langle G_Q : Q \in B \rangle, \quad G_{et} := G/G_{ram},$
($X/G_{ram} \rightarrow Y$ – największe nierozg. podnakrycie $X \rightarrow Y$)

Twierdzenie (w przygotowaniu)

Dla dowolnej krzywej X z działaniem p -grupy G w charakterystyce p :

$$H_{Hdg}^1(X) \cong k[G]^{\oplus 2(g_Y - d)} \oplus I_{X/Y} \oplus I_{X/Y}^\vee \oplus \bigoplus_Q H_{dR}^1(X_Q),$$

gdzie:

- ▶ $I_{X/Y} := \ker \left(\sum \oplus \mu : \bigoplus_Q I_{G, G_Q} \oplus k[G]^d \rightarrow I_G \right),$
- ▶ $G_{ram} := \langle G_Q : Q \in B \rangle, \quad G_{et} := G/G_{ram},$
($X/G_{ram} \rightarrow Y$ – największe nierozg. podnakrycie $X \rightarrow Y$)
- ▶ d – liczba generatorów grupy G_{et} .

Bibliografia I

- [1] J. Garnek.
 p -group Galois covers of curves in characteristic p .
Trans. Amer. Math. Soc., 376(8):5857–5897, 2023.
- [2] J. Garnek.
 p -group Galois covers of curves in characteristic p . II.
Doc. Math., 30(2):347–377, 2025.
- [3] J. Garnek.
Equivariant splitting of the Hodge-de Rham exact sequence.
Math. Z., 300(2):1917–1938, 2022.
- [4] J. Garnek.
Indecomposable direct summands of cohomologies of curves, 2024.
arXiv 2410.03319.

Bibliografia II

- [5] J. Garnek and A. Kontogeorgis.

The de Rham cohomology of covers with cyclic p -Sylow subgroup, 2025.

- [6] A. Kontogeorgis and A. Terezakis.

The canonical ideal and the deformation theory of curves with automorphisms, 2022.

[arXiv 2101.11084](#).

- [7] C. Chevalley, A. Weil, and E. Hecke.

Über das verhalten der integrale 1. gattung (...)

Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 10(1):358–361, 1934.

- [8] F. M. Bleher and N. Camacho.

Holomorphic differentials of Klein four covers.

J. Pure Appl. Algebra, 2023.

Dziękuję za uwagę!